Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano – Bicocca

Esercizi: funzione implicita e sulle curve.

Versione del 21 ottobre 2019

Indice

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).
Gli esercizi con "*" sono piú difficili degli altri !

---

1 Funzione implicita

1.1 Studio locale

1. Si verifichi che $x = 0$ é punto di massimo relativo per la funzione $y = f(x)$ definita implicitamente dall'equazione
$$e^{x+y} + x^2y^2 - e(x+1) = 0$$
con punto iniziale $(0,1)$.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} y^4 - xe^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
Si tracci un grafico qualitativo locale (individuando la retta tangente e la concavitá/convessitá) della curva di livello passante per $(1,1)$.

3. Sia γ la curva di livello di $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definita da
$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2},$$
passante per il punto $P = (1,2)$. Tracciare un grafico di γ in un intorno di P individuando la retta tangente e la concavitá/convessitá.
[$\gamma'(1) = 16/3$, $\gamma''(1) = 80/27$ *con* $y = \gamma(x)$.]

4. Sia γ la curva di livello di $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da
$$f(x,y) = x^y - y^2 + 2y,$$
passante per il punto $P = (1,1)$. Tracciare un grafico di γ in un intorno di P individuando la retta tangente e la concavitá/convessitá.

5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to\ R$ definita da $F(x,y,z) = 4 + e^x - x^2 - y^2 - xz$. Verificare che, in un intorno del punto $(2,e,0)$ la relazione $F(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $x = h(y,z)$. Si calcoli inoltre $\frac{\partial h}{\partial z}(e,0)$.

6. Verificare che l'equazione $e^x - 2e^y + 3x - 4y + 1 = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $(0,0)$, una funzione $y = f(x)$. Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di f, centrato in $x = 0$ e tracciare il grafico di f in un intorno di $x = 0$.

7. Si verifichi che $(1,0)$ é punto di massimo relativo per la funzione $z = f(x,y)$ definita implicitamente dall'equazione
$$(x-1)^2 + y^2 + e^z + e^{z^2} = 2$$
con punto iniziale $(1,0,0)$.

8. Si consideri la funzione $z = f(x,y)$ definita implicitamente dall'equazione
$$y^2 \log(x^2) + z \log(y+z) - y = 0$$
tale che $f(1,0) = 1$. Si determini il polinomio di Taylor P_2 del secondo ordine di f centrato in $(1,0)$.
[$P_2 = 1 + y^2/2$.]

9. Si verifichi che l'equazione
$$e^x + e^{y+z} - e^{x+z} + z - 1 = 0$$
definisce in un intorno dell'origine una funzione $z = f(x,y)$. Al variare di $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ versore in $\mathbb{R}^2$ si calcoli $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$.
[$-v_2$.]

10. Si verifichi che
$$\begin{cases} e^{x^2} - e^{x+z} + y = 1 \\ e^{y+z} - e^{x+z} + z^2 = 0 \end{cases}$$
definisce in un intorno del punto $(1,1,0)$ una curva in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica $x = t,\ y = y(t),\ z = z(t)$.

11. Si stabilisca se
$$\begin{cases} x^3 + y^2 - yz + x = 0 \\ \ln y + (x-y)(z^2-1) - z + 1 = 0 \end{cases}$$
definisce in un intorno del punto $(0,1,1)$ una funzione $(x,z) = (g_1(y), g_2(y))$.

1.2 vari

1. Si verifichi che l'equazione
$$y \exp\left(\int_1^x \frac{1}{1+t^8}\,\mathrm{d}t\right) - 2xe^{y-2} = 0$$
definisce implicitamente, in un intorno del punto $(1,2)$, una funzione $y = g(x)$. Si calcoli l'equazione della retta tangente al grafico di g in $(1,2)$.
[$y = -x + 3$.]

3. Sia $f(x,y) = x^2 - y^2 + y^4$.

   a. Si stabilisca se f definisce implicitamente, in un intorno del punto $(0,0)$, una funzione $y = h(x)$ o una funzione $x = g(y)$;

   *b.** si disegni l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = 0\}$.

   [a. No.]

4. Si consideri la funzione $f(x,y) = 1 + \sqrt[3]{y^5 - x^4}$. Si stabilisca se la curva di livello passante per il punto $(0,1)$ puó essere descritta localmente da una funzione $y = g(x)$; in caso affermativo e se possibile, si determini il polinomio di Mc Laurin al quarto ordine.

5. Sia $x = g(y)$ definita implicitamente in un intorno di $(0, 1)$ dall'equazione

$$-e^{y-x} - x^2y^2 + e(2x + y) = 0$$

Si calcoli

$$\lim_{y\to 1} \frac{g(y)}{(y-1)^2}$$

[1/6.]

6. Si consideri l'equazione

$$x^2 + 2x + e^y + y - 2z^3 = 0.$$

a. Si stabilisca se in un intorno del punto $(-1, 0, 0)$ definisce una superficie di equazione $y = g(x, z)$; in caso affermativo si scriva l'equazione del piano tangente alla superficie in $(-1, 0, 0)$;

b. si stabilisca se in un intorno del punto $(-1, 0, 0)$ definisce una superficie di equazione $z = h(x, y)$; in caso affermativo si scriva l'equazione del piano tangente alla superficie in $(-1, 0, 0)$.

[a. $y = 0$; b. $\nexists$.]

7. Si provi che l'equazione

$$\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + z^2y + e^{z+y} - y - x = 1$$

definisce una funzione $z = z(x, y)$ in un intorno di $(0, 0)$ tale che $z(0, 0) = 0$. Si determini l'equazione del piano tangente al grafico di z in $(0, 0)$.

[$z = 0$.]

8. Si provi che in un intorno di $(1, 1, 0)$ l'equazione

$$z + \int_1^x \frac{e^t}{2 + \sin(\pi t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{yz} \frac{t}{t^2 + e^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

definisce una funzione $z = g(x, y)$. Se possibile, si scriva il polinomio di Taylor centrato in $(1, 1)$ di g al secondo ordine.

2 Curve

1. Si calcoli la lunghezza delle seguenti curve

a. $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, definita da $\gamma(t) = (\cos t \sin t, \cos^2 t)$;

b. $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, definita da $\gamma(t) = (t^3, 2t^2, t^2)$;

c. $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^{3/2}, 1, t) & t \in [0, 1] \\ (e^t - e + 1, e^{t-1}, 1) & t \in (1, 2] \end{cases}$$

d. γ é il grafico della funzione $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$.

[a. $\pi/2$; b. $(-40\sqrt{5} + 29\sqrt{29})/27$.]

2. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t - 1, 1 - t^2, 2 + \frac{2}{3}t^3)$. Confrontare tale lunghezza con quella del segmento di estremi $A = \gamma(0)$ e $B = \gamma(1)$.

[lungh. $5/3$, $\overline{AB} = \sqrt{22}/3$.]