

Esercizi: estremi liberi e vincolati per funzioni in più variabili.

Versione del 6 gennaio 2021

Indice

1	Estremi liberi	1
1.1	Ottimizzazione libera concava/convessa	2
2	Estremi vincolati	3
2.1	Metodi differenziali	3
2.2	Metodo delle curve di livello	3
2.3	Metodo dei moltiplicatori di Lagrange	4
2.4	Vari	5

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).
 Gli esercizi con “*” sono più difficili degli altri !

1 Estremi liberi

1. Si determinino gli eventuali estremi di $f(x, y) = x^4y - xy^4 + 3$ nel suo dominio. [A.]

2. Si determinino gli eventuali estremi di $f(x, y) = \sqrt[2]{y^4 + x^3 - 3x^2 - 4y^2}$ nel suo dominio.
[min $(2, \pm\sqrt{2})$, max $(0, 0)$.]

3. Si stabilisca se l’origine é estremo locale per $f(x, y) = y^8 - y^4x^6 + x^4$. Si determinino inoltre

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) \qquad \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$$

4. Si determinino estremi locali e globali, estremo superiore ed inferiore di

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 3xz + 8y + 1$$

[min globale $(0, -2, 0)$, sup ∞ .]

5. Si determinino, nel dominio, estremi locali e globali di

$$f(x, y) = x^{2x} + (2y)^y$$

[min globale $(1/e, 1/(2e))$.]

6. Si determinino estremi locali e globali di

$$f(x, y, z) = 3 + e^{xy^2z^3+8}$$

[max locali $(x_0, 0, z_0)$ con $x_0z_0 < 0$, min locali $(x_0, 0, z_0)$ con $x_0z_0 > 0$.]

7.* Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione

$$f(x, y) = \log(1 - x + y) + x - \sqrt{|y|}$$

[max locale $(0, 0)$, sup ∞ , inf $-\infty$.]

8. Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione

$$f(x, y) = (xy - x^2)e^{-x-y}$$

[max locale (1/2, 3/2), sup ∞ , inf $-\infty$.]

9. Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione

$$f(x, y) = e^{x^2-y^2} + x^2 + y^2 + \log(1 + x^2 + |y|)$$

[min (0, 0), sup ∞ .]

10. Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione

$$f(x, y) = -e^{x^4+y^2} + x^2 + y^2 + 1$$

11. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^{\|\mathbf{x}\|(\|\mathbf{x}\|-1)(\|\mathbf{x}\|^{-4})} \frac{3}{1 + \arctan^2 t} dt$$

ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione f .

12. Sia

$$f(x, y) = \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2}$$

Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione f nel suo dominio.

13. Sia $f(x, y) = \log(x^2 + 1 + y^4) - e^{x^4+y^2} - x^2 + y^2 + x^2y^2$. Si stabilisca se il punto $(0, 0)$ è massimo o minimo locale per f .

[(0, 0) sella.]

14. Sia $f(x, y) = y^2 + 3x^4 - 4x^2y$. Si stabilisca se il punto $(0, 0)$ è massimo o minimo locale per f .

[(0, 0) sella.]

15. Si stabilisca se la funzione $f(x, y) = x^4 + \frac{1}{4}y^4 + 4xy^3 + 4x^2y^2$ ammette massimo e minimo relativo nell'origine.

[(0, 0) sella.]

1.1 Ottimizzazione libera concava/convessa

1. Si determini massimi e minimi assoluti e relativi delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 + xy + 3x - y + 1$;

2. $f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 3xy$;

3. $f(x, y) = x + 2y - 3x^4 - y^4$;

4. $f(x, y) = e^{x-y}$;

5. $f(x, y) = \log(x + y)$;

6. $f(x, y) = (e^x + e^y)^3$;

7. $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^4$;

8. $f(x, y) = x - x^2 - 3y^2$;

9. $f(x, y) = e^{2x-x^2-y^2}$;

10. $f(x, y) = 3xy - 2x^2 - 3y^2 + y - 1$;

11. $f(x, y) = \arctan(x^4 + y^4)$;

2 Estremi vincolati

2.1 Metodi differenziali

1. Si determinino gli eventuali estremi

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^5y^2}{(x^4 + y^2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$.

[min $(-1, 1), (-1, -1)$; max $(1, 1), (1, -1)$.]

2. Sia

$$f(x, y) = xy e^{\frac{xy}{x^2+y^2}}.$$

Si stabilisca se f sia limitata su \mathbb{R}^2 . Si determinino i punti di massimo e di minimo in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

[No; min $(-1/2, 1/2)$, max $(1/2, 1/2)$.]

3. Si determinino gli estremi della funzione

$$f(x, y) = \log(1 + x^4 + y^2)$$

vincolati alla curva di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

[min $(\pm 1, 0)$, max \mathcal{A} .]

4. Si determinino punti di massimo e di minimo locali/globali, estremo superiore ed inferiore della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$$

vincolata alla curva di equazione $xy^2 = 1$.

[max locale $(8/3)^{2/3}, (3/8)^{1/3}$, sup ∞ , inf 0 .]

2.2 Metodo delle curve di livello

1. Sia $f(x, y) = \log(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4})$. Si determini il massimo e il minimo di f in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo $x - 2y - 4 = 0$. Si determinino gli estremi.

[min $(4/5, -8/5)$, max \mathcal{A} .]

3. Sia $f(x, y) = \sqrt[4]{9 - x^2 - y^2}$. Si determini il massimo e il minimo di f in $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

4. Sia $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$. Si determini il massimo e il minimo di f in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- 5.* Sia $z = f(x, y)$ la funzione definita da $z \geq 0$, $x^2 + (y - z)^2 = 2z^2$. Si determini il massimo e il minimo di f in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$.

6. Sia $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 8$. Si determinino gli estremi.

[min $(2, 2)$, max $(-2, -2)$.]

7. Si determinino eventuale massimi e minimi di

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 - e^{x^2 + y^2}$$

in $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

8. Sia $f(x, y) = -x^2 + y$ soggetta al vincolo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y - 1 \leq 0\}$$

Si determinino gli estremi di f in D .

[min(1, 0), max(0, 1).]

9. Si determini il massimo di $f(x, y) = 6x + 4y - 10$ soggetta al vincolo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \geq 0, y - 4 \geq 0, xy + 3y - 12 \leq 0\}$$

[max(-1, 6).]

10. Si determini il massimo di $f(x, y) = -x + y$ soggetta al vincolo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3, x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 \leq 0\}$$

[max(2, 4).]

2.3 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Gli esercizi di seguito possono richiedere l'uso della tecnica dei "moltiplicatori di Lagrange".

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = (x + y)e^{-y^2+x}$.

- a. Si determinino gli eventuali massimi e minimi locali della funzione f in

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\}.$$

- b. Determinare, se esistono, la retta tangente alla curva di livello passante per il punto $(1/2, 1/2)$ e la retta tangente alla curva di livello passante per $(2, 1)$.

[a. max(1/2, 1/2).]

2. Determinare il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x, y) = x^2 + 3y$ soggetta al vincolo

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

3. Determinare il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x, y) = xy$ soggetta al vincolo

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

[max(1, 1) e (-1, -1); min(1/√3, -1/√3) e (-1/√3, 1/√3).]

4. Si trovino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y, z) = x^3 + 2x + 2z$$

vincolata all'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0, z - 2 + x = 0\}$.

5. Determinare il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x, y) = xy$ soggetta al vincolo

$$x^4 + 2x^2 + y^4 + 2y^2 = 4.$$

6. Determinare il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x, y, z) = 2x - y + z$ soggetta al vincolo

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

7. Determinare il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x, y, z) = 2x + 2y + z^2$ soggetta al vincolo

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

$$[\max(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0); \min(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0).]$$

- 8.* Si determinino, se esistono, massimi e minimi assoluti e relativi della funzione $f(x, y) = x^2$ vincolata da

$$xe^x + ye^y = 10.$$

$$[\max \text{ relativo } (\alpha, -1), \text{ con } \alpha e^\alpha = 10 + 1/e; \min \text{ assoluto } (0, 0).]$$

9. Si determinino massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = -x^2 e^{x^4}$ vincolata da

$$-x^2/2 - xy - x - y^2 = 0.$$

$$[\max(0, 0); \min(-4 - 2).]$$

10. Si determinino massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = e^x + e^y$ vincolata da

$$x^2 + y^2 = 1.$$

11. Si determinino massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = y^2 - x^2$ vincolata in

$$x^2 + (y + 1)^2 \leq 1.$$

$$[\max(0, -2); \min(\pm\sqrt{3}/2, -1/2).]$$

2.4 Vari

1. Si provi che

$$x^3 + y^3 - 3axy \geq -a^3$$

per ogni $x \geq 0, y \geq 0, a \geq 0$.

2. Si determini estremo superiore ed estremo inferiore di

$$f(x, y) = \sqrt{|x + y|} e^{-x^2 - y^2}$$

in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

$$[\sup (2e)^{-1/4}, \min 0.]$$

3. Sia

$$f(x, y) = \int_x^y e^{-t^2} dt$$

e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 2x\}$. Si determinino eventuale massimi e minimi di f in D .

$$[\min(x, x) \text{ per } x \geq 0, \max(\sqrt{(\log 2)/3}, 2\sqrt{(\log 2)/3}).]$$

4. Sia

$$f(x, y) = \log(1 + xy) + y^2 - 1$$

e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 2y)^2 - 4 \leq 0, 2xy + 1 \geq 0\}$. Si determinino eventuali punti di massimo e minimo di f in D .

$$[\min(-1 - \sqrt{2}, (\sqrt{2} - 1)/2) \text{ e } (1 + \sqrt{2}, (-\sqrt{2} + 1)/2) : \max(0, 1) \text{ e } (0, -1).]$$

5. Si determinino gli eventuali estremi di

$$f(x, y) = (3x^2 + 2y^2 - x|x| + 2)^{3/5}$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

$$[\min(0, 0), \max(-1, 0).]$$

6. Si determinino gli eventuali estremi di

$$f(x, y) = |x| + |y| - |xy|$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

7. Determinare eventuali estremi della funzione

$$f(x, y, z) = (x - 1)e^x + y^2 + z^2 + 2z$$

soggetta al vincolo $x + y + z = 1$.

$$[\min(\alpha, 1 - \alpha/2, -\alpha/2), \text{ con } \alpha \in (0, 1) : e^\alpha = 2/\alpha - 1.]$$

8. Determinare massimi e minimi assoluti e relativi, estremo superiore e inferiore della funzione

$$f(x, y) = xe^{-\sqrt{4y^2 + 2x^2 - 4}}$$

soggetta al vincolo $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

$$[\min \text{ assoluto } (-1, \pm\sqrt{3}/2), \min \text{ relativo } (2, 0), \max \text{ assoluto } (1, \pm\sqrt{3}/2), \max \text{ relativo } (-2, 0).]$$

9. Sia la funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Determinare

a. se esistono estremi relativi di f nel suo dominio;

b. se esistono estremi relativi di f in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x \leq 1, |y| \leq x^2\}.$$

$$[a. \min \text{ relativi } (1, 1), e(-1, -1). \quad b. \min(1/2, 1/4), \max(1/2, -1/4).]$$

10. Determinare massimi e minimi assoluti e relativi, estremo superiore e inferiore della funzione

$$f(x, y) = [(x + 1)^2 - (y - 1)^2 - 2x + 1] \log y$$

soggetta al vincolo $y^2 - x^2 = 1$.

$$[\min \text{ assoluto } (0, 1), \sup \infty].$$

11. Sia la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{xy(x - y^2 + 3)}$$

Determinare massimi e minimi assoluti e relativi, estremo superiore e inferiore della funzione f nel suo dominio.

12. Si consideri la funzione $f(x, y) = (x + y)e^{-y^2 - x}$.

a. Si determinino gli eventuali massimi e minimi locali della funzione f in

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\};$$

b. si determinino i massimi e minimi locali della funzione f in

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

$$[a. \max \text{ relativo } (1/2, 1/2). \quad b. \min \text{ relativo } (0, 1) \text{ e } (-1, 0), \max \text{ relativo } (1/2, 1/2) \text{ e } (-1 + \sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2).]$$

13. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \int_0^{xy} \frac{e^t - 1}{t} dt & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Determinare i punti di massimo e di minimi assoluti di f in

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$[\text{I punti di max non esistono; i punti di min coincidono con } \partial C.]$$

14. Si determinino i punti della superficie $z^2 - xy - 1 = 0$ piú vicini all'origine.

15. Si determinino i punti della linea

$$\begin{cases} z = 1 - xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

piú vicini e piú distanti dall'origine.

[I punti di max distanza sono $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2, 1/2)$; i punti di min distanza sono $(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2, 1/2)$.]

16. Si determinino massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y$ vincolata a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

17. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (x - y)e^{xy}.$$

a. Si determinino estremo superiore, estremo inferiore, eventuali massimi e minimi locali e globali di f in \mathbb{R}^2 ;

b. determinare il valore massimo e il valore minimi assunto da f in

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, xy \leq -1, y \leq -x, y \geq -2\};$$

[a. $\sup +\infty, \inf -\infty, \exists \max - \min$. b. $\min 4e^{-4}, \max 5/(2e)$.]

18. Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 + 2|y| \leq 0\}$$

e siano f, g due funzioni definite da

$$f(x, y) = e^{|y| - |x| + 1}, \quad g(x, y) = |x| + |y|$$

Si determinino, se esistono, i valori massimi e minimi assunti dalle due funzioni in D .

[$\max f = e, \min f = 1/e; \max g = 2, \min g = 0$.]

19.* Si determinino eventuali punti di massimo e minimo globale della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \log \left(\frac{5}{4}y^2 + x^2 - 4x + 4 \right)$$

in

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}.$$

[$\max(2, 2), \min(2, -2)$.]

20. Si determinino eventuali punti di massimo e minimo globale della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$$

in

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 4x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

[$\max(0, 0), \min(1/(2\sqrt{2}), 1/(2\sqrt{2}))$.]

21. Si determinino il sup e l'inf della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 2.$$

[$\sup f = +\infty, \min f = -6$.]