ESERCIZI SULLA CONVERGEZA PUNTUALE E UNIFORME

Andrea Calogero

Dipartimento di Matematica e Applicazioni – Università di Milano-Bicocca

(andrea.calogero@unimib.it)

19 novembre 2018

Indice

1 Successioni di funzioni **1**

2 Serie di funzioni **15**

2.1 Serie di potenze 24

Capitolo 1

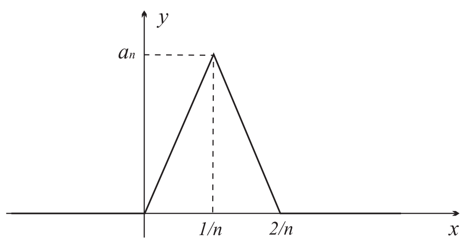
Successioni di funzioni

Esercizio 1.0.1. *Data una successione* $\{a_n\}_{n>0}$ *di numeri reali, si consideri la funzione* f_n*, definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} na_n x & \textit{se } 0 < x \leq 1/n \\ a_n(2 - nx) & \textit{se } 1/n < x < 2/n \\ 0 & \textit{altrove.} \end{cases}$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$*.*

Svolgimento • *Grafico di* f_n*.* Se $a_n > 0$, il grafico di f_n è indicato in figura.



• *Convergenza puntuale.* Per ogni $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ la successione $\{f_n(x)\}$ è identicamente nulla e quindi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
Sia ora $x \in (0, 1)$: la successione $\{f_n(x)\}$ è definitivamente nulla, cioè esiste un intero $n_0(x) = n_0$ tale che, per ogni $n > n_0$, si ha $f_n(x) = 0$ (nella fattispecie basta scegliere $n_0 \geq 2/x$). Quindi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Riassumendo, $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $\mathbb{R}$.

• *Convergenza uniforme.* Ricordiamo che $\{f_n\}$ converge uniformemente se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0|.$$

È facile verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} |a_n|;$$

quindi $\{f_n\}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Si noti infine che, se $\alpha > 0$, allora

$$\sup_{x\in(-\infty,0]\cup[\alpha,\infty)} |f_n(x) - 0| = 0 \qquad n \geq 2/\alpha.$$

Perciò $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 in $(-\infty, 0]\cup[\alpha,\infty)$, indipendentemente dal comportamento del $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Esercizio 1.0.2. *Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali non negativi, si consideri la successione $\{f_n\}$ definita da $f_n(x) = x^n e^{-a_n x}$. Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$ in $[0,\infty)$ nei seguenti casi:*

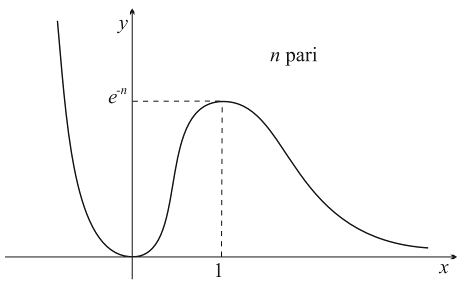
a. $a_n = n$,

b. $a_n = \sqrt{n}$,

c. $a_n = n^2$,

d. $a_n = 1/n$.

Svolgimento di a. • *Grafico di f_n.*



• *Convergenza puntuale.* Osserviamo che se $x \geq 0$ si ha $0 \leq xe^{-x} < 1$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} x^n e^{-nx} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = 0.$$

Quindi, $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $[0,\infty)$.

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-nx}(1-x):$$

ne deduciamo che 1 è il punto di massimo assoluto di f. Perciò

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - 0| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(1) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-n} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Abbiamo provato che f_n converge uniformemente a 0 in $[0,\infty)$.

Svolgimento di b. • *Convergenza puntuale.* Immediatamente abbiamo $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Sia $x > 0$, per le proprietà dei logaritmi abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} x^n e^{-\sqrt{n}x} = \lim_{n\to\infty} e^{n\log x - \sqrt{n}x} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \infty & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $[0,1]$.

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che

$$f_n'(x) = \sqrt{n}x^{n-1}e^{-\sqrt{n}x}(\sqrt{n}-x);$$

il punto di massimo è in $\sqrt{n}$ e che in $[0,1]$ la funzione è crescente. Otteniamo

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0| = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$$

quindi $\{f_n\}$ converge uniformemente alla funzione nulla in $[0,1]$.

Svolgimento di c. • *Convergenza puntuale.* Sia $x>0$, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} x^n e^{-n^2x} = \lim_{n\to\infty} e^{n\log x - n^2x} = 0$$

ed essendo $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, possiamo concludere che $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $[0,\infty)$.

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che il punto di massimo ora è $1/n$ che, al crescere di n, si sposta verso l'origine. Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)-0| &= \lim_{n\to\infty} f_n(1/n)\\ &= \lim_{n\to\infty}(en)^{-n}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Concludiamo che $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 in $[0,\infty)$.

Svolgimento di d. • *Convergenza puntuale.*

$$\lim_{n\to\infty} x^n e^{-x/n} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0\le x<1\\ 1 & \text{se } x=1\\ \infty & \text{se } x>1.\end{cases}$$

Quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione $\mathbf{1}_{\{1\}}$ in $[0,1]$.

• *Convergenza uniforme.* Ricordiamo che la funzione limite di una successione di funzioni continue, uniformemente convergente nell'insieme E è continua in E.

Poiché f_n è continua in $[0,1]$ e $\mathbf{1}_{\{1\}}$ non lo è, $\{f_n\}$ non può convergere uniformemente a $\mathbf{1}_{\{1\}}$ in $[0,1]$.

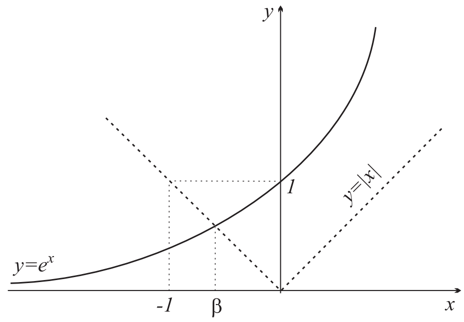
Studiamo la convergenza uniforme in $[0,\alpha]$, con $0<\alpha<1$. Essendo in tale intervallo $e^{-x/n}\le e^{\alpha/n}$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,\alpha]}|f_n(x)-\mathbf{1}_{\{1\}}(x)| &= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,\alpha]}|x|^n e^{-x/n}\\ &\le \lim_{n\to\infty} e^{\alpha/n}\sup_{x\in[0,\alpha]}|x|^n\\ &\le \lim_{n\to\infty} e^{\alpha/n}\alpha^n\\ &= 0.\end{aligned}$$

Quindi $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 in $[0,\alpha]$.

Osservazione. L'esercizio 1.0.2 richiede una attenzione particolare se la convergenza puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}$ viene studiata in $\mathbb{R}$. Come esempio, studiamo la convergenza puntuale di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$ nel caso a.

Per $x < 0$ abbiamo $\lim_{n\to\infty} \left|f_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x|}{e^x}\right)^n$. Con l'ausilio del seguente grafico osserviamo che $|x|e^{-x} < 1$ se e solo se $x > \beta$, dove β è l'unica soluzione dell'equazione $|x| = e^x$.



Quindi ,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = \begin{cases} \nexists & \text{se } x \le \beta \\ 0 & \text{se } \beta < x \le 0. \end{cases}$$

Allora $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $[\beta, 0]$.
Invitiamo il lettore a completare lo svolgimento dell'esercizio nei quattro casi proposti.

Esercizio 1.0.3. *Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, si consideri la funzione f_n definita da*

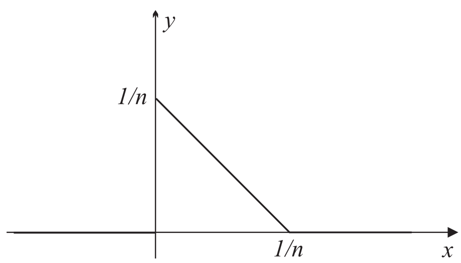
$$f_n(x) = \begin{cases} a_n(1 - nx) & se\ 0 \le x < 1/n \\ 0 & altrove. \end{cases}$$

Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$ e si stabilisca se la convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$ in ciascuno dei seguenti casi:

a. $a_n = 1/n$;

b. $\{a_n\}$ successione qualsiasi.

Svolgimento di a. • *Grafico di f_n.*



• *Convergenza puntuale.* Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la successione $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente nulla. Infatti, se $n \ge 1/x$, allora $f_n(x) = 0$. Inoltre,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(0) &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= \lim_{n\to\infty} 1/n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $\mathbb{R}$.

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0.$$

Perciò $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 in $\mathbb{R}$.

Svolgimento di b. • *Convergenza puntuale.* Come in a., $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se esiste finito il $\lim_{n\to\infty} a_n$, che indicheremo con a, allora $\{f_n\}$ converge puntualmente in 0 e quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $a \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$.

Se, invece, la successione $\{a_n\}$ non ha limite o ha limite infinito, allora $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• *Convergenza uniforme.* Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, altrimenti su tutto $\mathbb{R}$ non avremmo neanche la convergenza puntuale. Essendo $\{f_n\}$ nulla in $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$, per ogni n, abbiamo

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - a \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(x)| &= \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - a \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(x)| \\
&= \max\Big(\sup_{x\in(0,1]} |f_n(x)|,\ |a_n - a|\Big) \\
&= \max\left(|a_n|,\ |a_n - a|\right).
\end{aligned}$$

Quindi

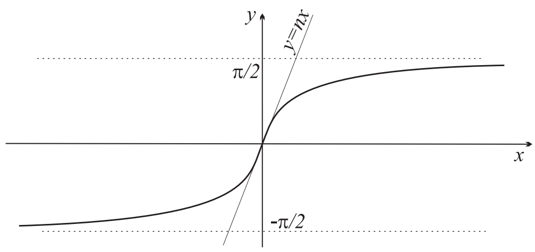
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - a \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(x)| &= \lim_{n\to\infty} \max\left(|a_n|,\ |a_n - a|\right) \\
&= \max\Big(\lim_{n\to\infty} |a_n|,\ \lim_{n\to\infty} |a_n - a|\Big) \\
&= \max\Big(\lim_{n\to\infty} |a_n|,\ 0\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} |a_n|.
\end{aligned}$$

Quindi $\{f_n\}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esercizio 1.0.4. *Si studino le convergenze puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione $\{f_n\}$, definita da*

$$f_n(x) = \arctan(nx) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento • *Grafico di f_n.*



• *Convergenza puntuale.* Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \pi/2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f(x) = (\pi/2)\big(\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) - \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)\big)$.

• *Convergenza uniforme.* Poiché $\{f_n\}$ è una successione di funzioni continue e f non è continua in $\mathbb{R}$, $\{f_n\}$ non converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.

Studiamo la convergenza uniforme in $[\alpha,\infty)$, con $\alpha > 0$. Poiché $(\pi/2) - \arctan(nx)$ è decrescente in $[\alpha,\infty)$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[\alpha,\infty)} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[\alpha,\infty)} \big(\pi/2 - \arctan(nx)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(\pi/2 - \arctan(n\alpha)\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La simmetria delle funzioni in esame permette di concludere che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $(-\infty, \; -\alpha] \cup [\alpha, \; \infty)$, per ogni $\alpha > 0$.

Esercizio 1.0.5. *Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali positivi, si consideri la successione $\{f_n\}$ definita da*

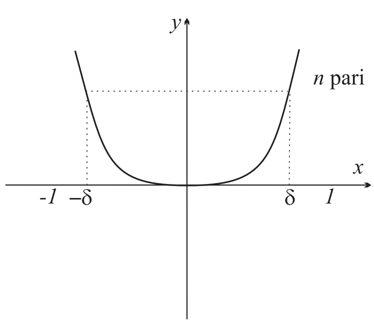
$$f_n(x) = a_n x^n \qquad x \in \mathbb{R}.$$

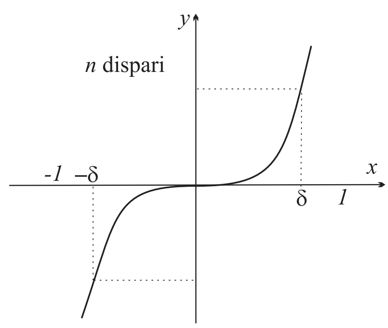
Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$ in ciascuno dei seguenti casi:

a. $a_n = n^\alpha$*, con α reale positivo;*

b. $a_n = 1/\sqrt{n}$.

Svolgimento di a. • *Grafico di f_n.*





• *Convergenza puntuale.* Osserviamo che se $x \leq -1$, allora $\{f_n(x)\}$ non ammette limite per n tendente a ∞ e che

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \infty & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente in $(-1, 1)$ alla funzione nulla.

• *Convergenza uniforme.* Studiamo la convergenza uniforme in $[-\delta,\ \delta]$, con $0 < \delta < 1$. È facile convincersi che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-\delta,\delta]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \delta^n = 0.$$

Quindi $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[-\delta, \delta]$ alla funzione nulla.

Svolgimento di b. • *Convergenza puntuale.* È facile verificare che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla funzione nulla in $[-1, 1]$.

• *Convergenza uniforme.* Essendo

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} (1/\sqrt{n}) = 0,$$

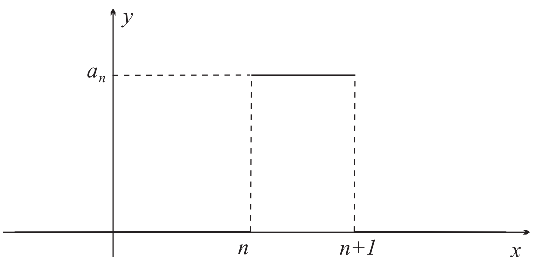
la convergenza è uniforme in $[-1, 1]$.

Esercizio 1.0.6. *Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, si consideri la funzione f_n definita da*

$$f_n(x) = a_n \mathbf{1}_{[n,n+1)}(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^+$.

Svolgimento • *Grafico di f_n.* Se $a_n > 0$, il grafico di f_n è quello indicato in figura.



• *Convergenza puntuale.* Sia $x \in \mathbb{R}^+$. Osserviamo che $f_n(x) = 0$ per ogni $n \geq [\![x]\!] + 1$. Quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $\mathbb{R}^+$.

• *Convergenza uniforme.* Mostriamo che, per ogni $\alpha > 0$, $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0, \alpha]$.

Infatti

$$\sup_{x\in[0,\alpha]} |f_n(x) - 0| = 0 \qquad n \geq [\![\alpha]\!] + 1.$$

Si osservi che $\{f_n\}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}^+$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, perché

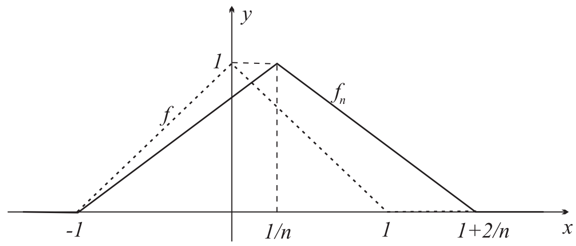
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - 0| = |a_n|.$$

Esercizio 1.0.7. *Data la successione $\{f_n\}$, definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n(x+1)}{n+1} & \textit{se } -1 < x < 1/n \\ \dfrac{n - nx + 2}{n+1} & \textit{se } 1/n \leq x < 1 + 2/n \\ 0 & \textit{altrove,} \end{cases}$$

se ne studino le convergenze puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$.

Svolgimento • *Grafico di* f_n.



• *Convergenza puntuale.* Il grafico di f_n rappresenta un triangolo isoscele i cui vertici, al tendere di n all'infinito, si comportano nel seguente modo: uno rimane fisso in $(-1,0)$, un altro si sposta lungo l'asse x verso $(1,0)$, l'ultimo si sposta verso $(1,0)$ sulla retta $y=1$. Quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } -1<x<0 \\ 1-x & \text{se } 0\le x<1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Vediamo ora una dimostrazione più analitica. Per ogni $x\in\mathbb{R}$,

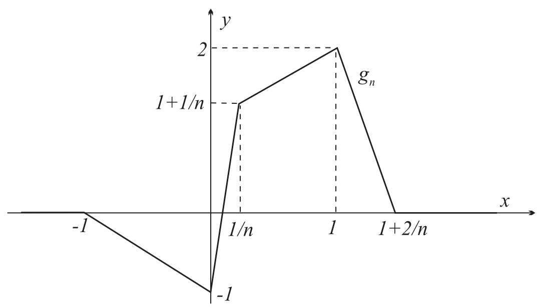
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(x+1)}{n+1}\,\mathbf{1}_{(-1,1/n)}(x)+\frac{n-nx+2}{n+1}\,\mathbf{1}_{[1/n,1+2/n)}(x)\right) \\ &= (x+1)\,\mathbf{1}_{(-1,0)}(x)+(1-x)\,\mathbf{1}_{[0,1)}(x), \end{aligned}$$

come richiesto.

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che se ¿1, allora $\{f_n\}$ è definitivamente nulla in $(-\infty,-1]\cup[$¿$\infty)$. *Ergo* $\{f_n\}$ converge ivi uniformemente a 0. Al fine di stabilire se $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$, valutiamo f_n-f:

$$\begin{aligned} f_n(x)-f(x) &= \left[\frac{n(x+1)}{n+1}\,\mathbf{1}_{(-1,0)}(x)+\frac{n(x+1)}{n+1}\,\mathbf{1}_{[0,1/n)}(x)+\frac{n-nx+2}{n+1}\,\mathbf{1}_{[1/n,1)}(x)\right. \\ &\quad \left.+\frac{n-nx+2}{n+1}\,\mathbf{1}_{[1,1+2/n)}(x)\right]-\left[(x+1)\,\mathbf{1}_{(-1,0)}(x)+(1-x)\,\mathbf{1}_{[0,1)}(x)\right] \\ &= \frac{1}{n+1}\Big[-(x+1)\,\mathbf{1}_{(-1,0)}(x)+(2nx+x-1)\,\mathbf{1}_{[0,1/n)}(x) \\ &\quad +(x+1)\,\mathbf{1}_{[1/n,1)}(x)+(n-nx+2)\,\mathbf{1}_{[1,1+2/n)}(x)\Big]. \end{aligned}$$

Per ogni n, sia g_n la funzione tra le ultime parentesi quadre: il suo grafico è disegnato in figura.



Poiché

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sup_{\mathbb{R}}|g_n(x)|}{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\\ &= 0,\end{aligned}$$

la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.0.8. *Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, si consideri la funzione f_n definita da*

$$f_n(x) = e^{-(x-a_n)^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$ nei seguenti casi:

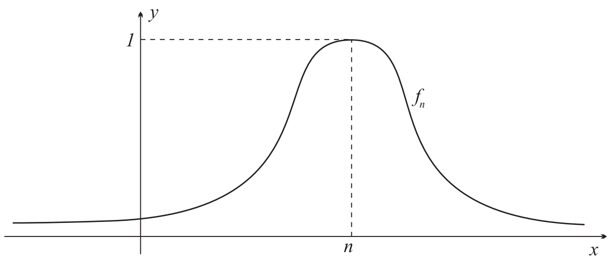
a. $a_n = (-1)^{n^2}$,

b. $a_n = n$,

c. $a_n = 1/n$.

Svolgimento di a. • *Convergenza puntuale.* Il $\lim_{n\to\infty} e^{-(x-(-1)^{n^2})^2}$ esiste se e solo se $x = 0$. Quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente solo in 0; non è quindi interessante lo studio della convergenza uniforme.

Svolgimento di b. • *Grafico di f_n.* Si osservi che i grafici delle f_n si ottengono traslando il grafico di $x \mapsto e^{-x^2}$ di n verso destra.



• *Convergenza puntuale.* Poiché $\lim_{n\to\infty} e^{-(x-n)^2} = 0$, $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $\mathbb{R}$.

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-0| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-(x-n)^2} = 1.$$

Quindi $\{f_n\}$ non converge uniformemente a 0 in $\mathbb{R}$.

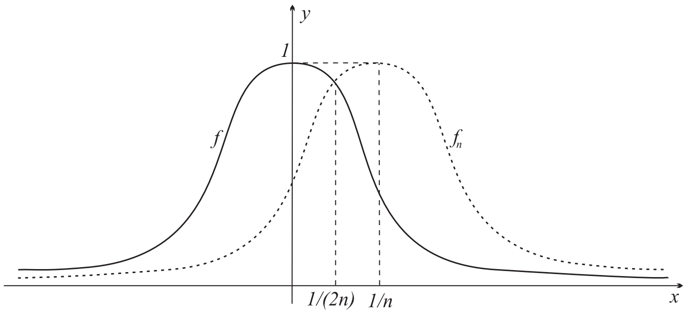
Mostriamo che $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 in $(-\infty,\alpha]$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Notiamo che, per $n > \alpha$, i punti di massimo di f_n non appartengono a $(-\infty,\alpha]$ e che f_n è ivi crescente. Quindi

$$\sup_{x\in(-\infty,\alpha]}|f_n(x)-0| = \begin{cases} 1 & \text{se } n \le \alpha \\ e^{-(\alpha-n)^2} & \text{se } n > \alpha,\end{cases}$$

da cui segue che $\lim_{n\to\infty}\sup_{(-\infty,\alpha]}|f_n(x)-0| = 0$, come richiesto.

Svolgimento di c. • *Grafico di f_n.*

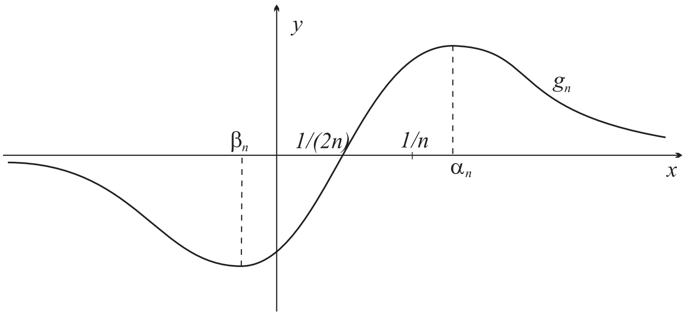


• *Convergenza puntuale.* La successione $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = e^{-x^2}$, come si verifica facilmente.

• *Convergenza uniforme.* Presentiamo tre svolgimenti.
PRIMO METODO. Dobbiamo valutare

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-(x-1/n)^2} - e^{-x^2} \right|.$$

Per ogni n, definiamo $g_n(x) = e^{-(x-1/n)^2} - e^{-x^2}$; il grafico di g_n è in figura.



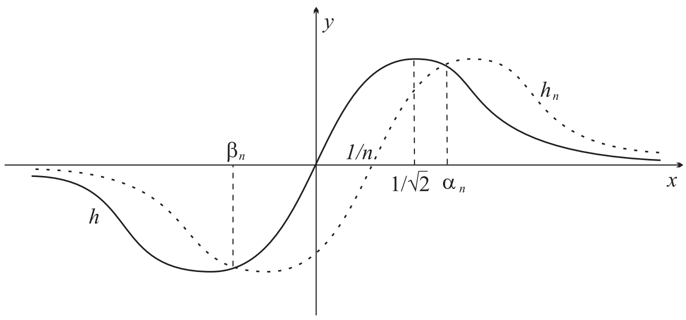
Ricerchiamo, tramite lo studio della derivata prima, i punti estremanti di g_n:

$$g_n'(x) = -2\left(x - \frac{1}{n}\right) e^{-(x-1/n)^2} + 2xe^{-x^2}.$$

Quindi, condizione necessaria affinché x sia estremante per g_n è che

$$\left(x - \frac{1}{n}\right) e^{-(x-1/n)^2} = xe^{-x^2}. \qquad (1)$$

Sia $h(x) = xe^{-x^2}$: si noti che h ha estremanti in $\pm 1/\sqrt{2}$. Sia inoltre $h_n(x) = h(x - 1/n)$. L'equazione (1) è equivalente a $h(x) = h_n(x)$.



Per $n \geq 2$, l'equazione $h(x) = h_n(x)$ ammette due soluzioni α_n e β_n, con $\alpha_n > 1/\sqrt{2}$ e $\beta_n < 0$; α_n e β_n sono i punti estremanti di g_n. Inoltre, $g_n(\alpha_n) = -g_n(\beta_n)$. Allora

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - e^{-x^2}| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| \\
&= e^{-(\alpha_n - 1/n)^2} - e^{-\alpha_n^2} \\
&= e^{-\alpha_n^2}\left(\frac{e^{-(\alpha_n-1/n)^2}}{e^{-\alpha_n^2}} - 1\right) \\
&= e^{-\alpha_n^2}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1/n} - 1\right).
\end{aligned}$$

Essendo $\alpha_n > 1/\sqrt{2}$, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - e^{-x^2}| = \lim_{n\to\infty} e^{-\alpha_n^2}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1/n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2}}{n\alpha_n - 1} = 0.$$

Poiché $\alpha_n > 1/\sqrt{2}$, per ogni $n \geq 2$, abbiamo $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = \infty$. Quindi $\{f_n\}$ converge uniformemente a e^{-x^2} in $\mathbb{R}$.

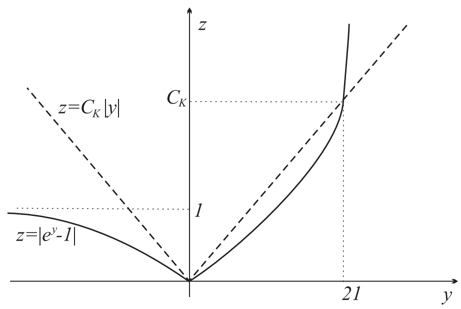
SECONDO METODO. Studieremo la convergenza uniforme prima su un insieme compatto del tipo $K = [-\alpha,\ \alpha]$ e poi nel suo complementare K^c: l'idea è quella di studiare separatamente cosa succede in un intorno dell'origine e all'infinito. Sia per esempio $\alpha = 10$. Valutiamo

$$\sup_{x\in K} |f_n(x) - e^{-x^2}| = \sup_{x\in K} e^{-x^2}\left|e^{\left(\frac{2x}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} - 1\right|.$$

Essendo $x \geq -10$, per ogni n e per ogni $x \in K$ abbiamo

$$-(2x)/n + 1/n^2 \leq 20/n + 1/n^2 \leq 21.$$

Studiando il grafico di $y \mapsto |e^y - 1|$, per $y \leq 21$ abbiamo $|e^y - 1| \leq C_K|y|$, con $C_K = (e^{21} - 1)/21$ costante dipendente da K.



Quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |f_n(x) - e^{-x^2}| &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \left(e^{-x^2} C_K \left|\frac{2x}{n} - \frac{1}{n^2}\right|\right) \\
&\leq C_K \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \left(\frac{2|x|}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&\leq C_K \lim_{n\to\infty} \left(\frac{20}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

che garantisce la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ a e^{-x^2} in K.

Studiamo ora la convergenza uniforme in $\overline{K^c} = \{x : |x| \geq 10\}$. Senza ripetere i conti già svolti con il primo metodo risolutivo di questo esercizio, dallo studio della derivata prima abbiamo che g_n è crescente in $(-\infty, -10]$ e decrescente in $[10, \infty)$: inoltre $g_n(10) > |g_n(-10)|$. Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\geq 10} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to\infty} |f_n(10) - f(10)| \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-100}\big(e^{20/n-1/n^2} - 1\big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

che garantisce la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ a e^{-x^2} in $\overline{K^c}$. Concludendo, abbiamo convergenza uniforme in $\mathbb{R}$.

TERZO METODO. Sia $f(x) = e^{-x^2}$. Osserviamo che

$$f_n(x) = f(x - 1/n) \qquad x \in \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Per il teorema del valor medio

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x - 1/n) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f'(x)|}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} 2|x|e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Poiché la funzione $x \mapsto |x|\, e^{-x^2}$ è limitata in $\mathbb{R}$ (è continua e tende a zero all'infinito), possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

ciò che prova la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ a f in $\mathbb{R}$.

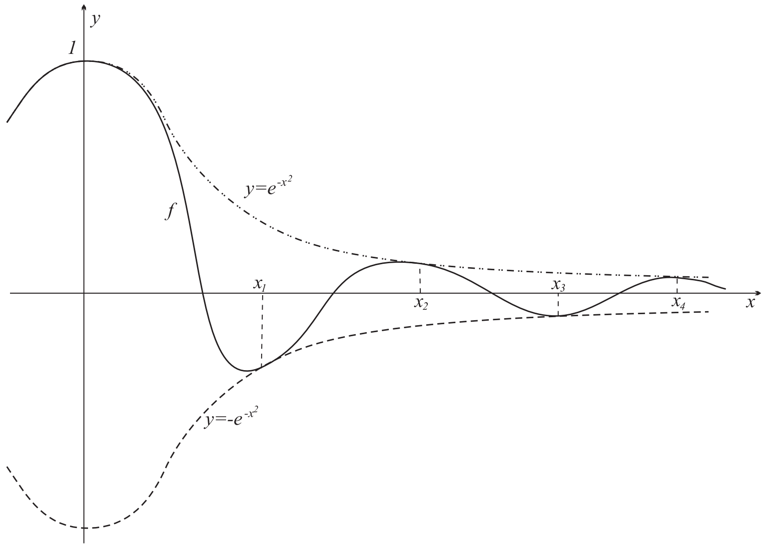
Esercizio 1.0.9. *Si consideri la funzione f_n definita da*

$$f_n(x) = e^{-(x-1/n)^2} \cos\left(e^{(x-1/n)^2}\right).$$

a. Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$. Si verifichi che $\{f_n\}$ converge uniformemente in ogni compatto K.

b. Si studi la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento di a. • *Grafico di f_n.* Il grafico di f_n si ottiene traslando il grafico della funzione $f(x) = e^{-x^2} \cos(e^{x^2})$ verso destra.



Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $x_k = \sqrt{\log(k\pi)}$: abbiamo $|f(x_k)| = e^{-x_k^2}$. Il lettore osservi che i punti x_k non sono punti estremanti (basta verificare che $f'(x_k) \neq 0$) e che la distanza fra x_k e x_{k+1} diminuisce al crescere di k.

• *Convergenza puntuale.* Si verifica facilmente che $\{f_n\}$ converge puntualmente a f in $\mathbb{R}$.

• *Convergenza uniforme.* L'esercizio non è molto differente dal precedente nel caso $a_n = 1/n$. Possiamo sfruttare il fatto che $f_n(x) = f(x-1/n)$ e usare il teorema di Lagrange, in modo analogo a quanto fatto nel terzo metodo dell'esercizio precedente, per dimostrare che per ogni $M > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\leq M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Ciò prova che $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in $[-M, M]$.

Svolgimento di b • *Convergenza uniforme.* Sia $\epsilon > 0$. Non è difficile mostrare che esiste $M > 0$ tale che

$$\sup_{|x|\geq M} |f_n(x)| < \epsilon/4 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{|x|\leq M} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{|x|\geq M} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{|x|\leq M} |f_n(x) - f(x)| + \epsilon/2. \end{aligned}$$

Per il teorema del valor medio

$$\begin{aligned} \sup_{|x|\leq M} |f_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{n} \sup_{|x|\leq M} |f_n'(x)| \\ &\leq \frac{C}{n}. \end{aligned}$$

Sia N tale che $C/N < \epsilon/2$. Allora per ogni $n \geq N$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

e quindi $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.

Capitolo 2

Serie di funzioni

Esercizio 2.0.1. *Sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *come nell'Esercizio 1.0.1. Si studino le convergenze puntuale e uniforme della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *nei seguenti casi:*

a. $a_n = 1/n^2$*;*

b. $a_n = 1/n$*;*

c. $a_n = (-1)^n/n$*.*

Svolgimento di a. • *Convergenza puntuale.* Se $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$, allora $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è identicamente nulla e quindi la serie converge a 0.

Se $x \in (0, 2)$, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{1\leq n<1/x} f_n(x);$$

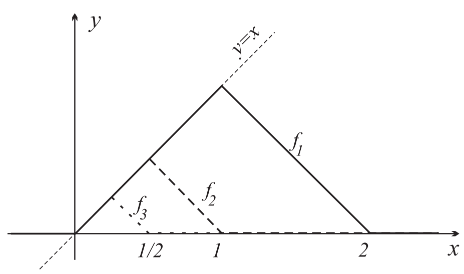
avendo solo un numero finito di termini non nulli, quest'ultima serie converge. Quindi $\sum f_n$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$, per qualunque scelta della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

• *Convergenza uniforme.* Notiamo che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) \right| = \frac{1}{n^2}.$$

Quindi, per il criterio di Weierstrass, la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Svolgimento di b. • *Grafico di* f_n.



- *Convergenza uniforme.* La condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f_n(x)\big| = 0$$

è soddisfatta. Il criterio di Weierstrass non si applica, perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f_n(x)\big| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Presentiamo due metodi risolutivi.
PRIMO METODO. Mostriamo che la successione delle somme parziali della serie data non è di Cauchy. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{i=1}^{n+k} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \\
&\geq \sup_{x\in[0,1/(n+k)]} \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \\
&= \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i\big(1/(n+k)\big) \\
&= \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{n+k-n}{n+k} \\
&= \frac{k}{n+k}.
\end{aligned}$$

Scegliendo, per esempio, $n = k$, abbiamo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{i=1}^{2n} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Quindi la successione delle somme parziali non è di Cauchy e $\sum_n f_n$ non converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Si osservi che dato $\alpha > 0$, $\sum f_n$ converge uniformemente in $(-\infty, 0] \cup [\alpha, \infty)$, perché solo un numero finito di addendi della serie sono ivi non nulli.
SECONDO METODO. Ricordiamo che la funzione somma di una serie di funzioni continue uniformemente convergente è continua. Affermiamo che, nel caso in esame, la funzione somma f non è continua, da cui seguirà che la serie data non converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Per dimostrare l'affermazione, osserviamo che

$$f(1/n) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(1/n) \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(1/n) = \sum_{i=1}^{n} 1/n = 1 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Conseguentemente,

$$\lim_{n\to\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big) \geq 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x);$$

perciò f non è continua in 0, come affermato.

Svolgimento di c. • *Convergenza uniforme.* Essendo $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non crescente per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza uniforme, per il criterio di Leibniz $\sum f_n$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.0.2. *Sia f_n la funzione definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) & \textit{se } \frac{1}{n+1} \le x < \frac{1}{n} \\ 0 & \textit{se } \frac{1}{n} \le x. \end{cases}$$

a. Si determini l'insieme E di convergenza puntuale della serie $\sum_n f_n$ e si mostri che la sua somma è continua in E;

b. si mostri che $\sum f_n$ non converge uniformemente in E.

Svolgimento di a. Osserviamo che $f_n(x) = \mathbf{1}_{[1/(n+1),1/n)}(x) \cdot \sin^2(\pi/x)$.

Se $x \notin (0,1)$, allora $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è identicamente nulla; se $x \in (0,1)$, allora $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente nulla. Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty$ ed $E = \mathbb{R}$.

Inoltre,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\ge 1} 0 & \text{se } x \notin (0,1) \\ \Big(\displaystyle\sum_{n \ne [\![1/x]\!]} 0\Big) + f_{[\![1/x]\!]}(x) & \text{se } x \in (0,1), \end{cases}$$

e quindi la funzione somma è $f(x) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x) \cdot \sin^2(\pi/x)$.

Svolgimento di b. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f_n(x)\big| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(1/(n+1),1/n)} \sin^2(\pi/x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in(n\pi,(n+1)\pi)} \sin^2(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

e quindi la serie data non converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.0.3. *Si studino le convergenze puntuale, assoluta e uniforme della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}.$$

• *Convergenza puntuale.* La serie data converge puntualmente in $\mathbb{R}$ per il criterio di Leibniz sulle serie a segno alterno.

• *Convergenza assoluta.* Per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2+n}{n^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Quindi la serie diverge assolutamente in ogni punto di $\mathbb{R}$.

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x^2+n}{n^2}\right| = \infty \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Perciò la condizione necessaria di convergenza della serie $\sum_n f_n$ non è soddisfatta, e quindi essa non converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Dimostriamo che $\sum_n f_n$ converge uniformemente in $[-\alpha, \alpha]$, dove $\alpha > 0$. Infatti, $\{(x^2+n)/n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona non crescente per ogni x in $[-\alpha, \alpha]$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} \left|\frac{x^2+n}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^2+n}{n^2} = 0.$$

La tesi segue dal teorema di Leibniz per serie di funzioni.

Esercizio 2.0.4. *Data la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n,$$

a. si determini l'insieme dei punti dove converge;

b. si stabilisca se la convergenza è uniforme in $[0, \pi/4]$*;*

c. si calcoli $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n\right) \, \mathrm{d}x.$

Svolgimento di a. Se $x \notin \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, allora $0 \le |\sin x| < 1$, e la serie data è una serie geometrica di ragione compresa tra -1 e 1, *ergo* assolutamente convergente.

Se $x \in \pi/2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, allora la serie diverge (il suo termine generale è la successione costante 1).

Se $x \in 3\pi/2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, allora la serie è indeterminata (il suo termine generale è $\{(-1)^n\}$).

Svolgimento di b. Osserviamo che

$$\sup_{x\in[0,\pi/4]} (\sin x)^n \le 2^{-n/2}.$$

Poiché $\sum_n 2^{-n/2} < \infty$, la serie data converge uniformemente in $[0, \pi/4]$ per il criterio di Weierstrass.

Suggerimento di c. Si calcoli la funzione somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n$.

Esercizio 2.0.5. *Si consideri la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, (x-1)^n \, \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

a. Si determini l'insieme $E \subset \mathbb{R}$ *in cui essa converge puntualmente, e si indichi con* $f(x)$ *la sua somma.*

b. Si verifichi che la serie converge uniformemente in $[a, 2]$*, per ogni* $a \in (0, 1)$*.*

c. Si calcoli $f(3/2)$ con un errore inferiore a 10^{-2}.

Svolgimento di a. Se $x \in (0,2)$, la serie assegnata converge assolutamente.

Se $x = 0$, la serie diverge.

Se $x = 2$, allora la serie converge per il criterio di Leibniz.

Infine, se $x \notin [0,2]$, allora la serie diverge perché il suo termine generale non è infinitesimo.

In conclusione, $E = (0,2]$.

Svolgimento di b. Studiamo la convergenza uniforme separatamente in $[a,1]$ e in $[1,2]$.

Indichiamo con $f_n(x)$ il termine generale della serie. Osserviamo che

$$\sup_{x\in[a,1]} \bigl|f_n(x)\bigr| \le \frac{|a-1|^n}{n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

La serie $\sum |a-1|^n/n$ è convergente; per il criterio di Weierstrass la serie $\sum_n f_n$ converge uniformemente in $[a,1]$, per ogni $0 < a < 1$.

Mostriamo che la serie $\sum_n f_n$ converge uniformemente in $[1,2]$ in virtù del criterio di Leibniz per le serie di funzioni.[1] Infatti

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,2]}\left|f_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

e la successione $\{(x-1)^n\log(1+1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è non crescente per ogni x in $[1,2]$.

Esercizio 2.0.6. *Data la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{x^{2n}+n^a} \qquad a\in\mathbb{R}^+,$$

si stabilisca per quali valori di a essa

a. converge puntualmente in $|x|<1$;

b. converge puntualmente in $|x|>1$;

c. converge puntualmente in $\mathbb{R}$;

---

[1] Ricordiamo il noto Teorema di Leibniz:

Teorema 2.1. *Sia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione positiva, decrescente e infinitesima. Allora $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge a un numero S. Inoltre, per ogni $N>0$*

$$\left|S-\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n\right| \le a_{N+1}. \tag{2.1}$$

Supponiamo ora che per la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n(x)$ e per l'insieme $A\subset\mathbb{R}$ si abbia che, per ogni $x\in A$ fissato, $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sia una successione positiva, decrescente e infinitesima; allora il Teorema di Leibniz garantisce che $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n(x)$ converge puntualmente in A; inoltre (2.1) garantisce che

$$\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n f_n(x)\right| \le f_N(x), \qquad \forall x\in A, N>0$$

dove abbiamo indicato con $f(x)$ la somma della serie per $x\in A$.
E' noto, per definizione, che una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ puntualmente converge alla funzione $g(x)$ in A, converge uniformemente in A se la successione delle sue somme parziali $\left\{\sum_{n=0}^{N} g_n(x)\right\}_{N=0}^{\infty}$ converge uniformemente a $g(x)$ in A: in altre parole se

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{x\in A}\left|g(x)-\sum_{n=0}^{N} g_n(x)\right| = 0. \tag{2.2}$$

Se ora torniamo alla serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n(x)$ con le ipotesi sopra descritte, (2.1) garantisce che garantisce che (2.2) è equivalente a

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{x\in A}\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}(-1)^n f_n(x)\right| = \lim_{N\to\infty}\sup_{x\in A} f_N(x) = 0. \tag{2.3}$$

L'ultima uguaglianza è nota come criterio di Leibniz per le serie di funzioni.

d. *converge uniformemente in* $[-1,1]$*, dopo aver dimostrato che converge uniformemente in* $\mathbb{R}$ *se* $a > 2$*.*

Svolgimento di a. e b. Osserviamo che

$$\frac{|x|^n}{x^{2n}+n^a} \leq |x|^n \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per ogni $a \in \mathbb{R}^+$, la serie $\sum_n f_n$ converge puntualmente in $(-1,1)$ in virtù del criterio del confronto.

Similmente,

$$\frac{|x|^n}{x^{2n}+n^a} < \frac{1}{|x|^n} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per ogni $a \in \mathbb{R}^+$, la serie $\sum_n f_n$ converge puntualmente in in $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ in virtù del criterio del confronto.

Svolgimento di c. Dobbiamo studiare i punti ± 1: in entrambi i casi abbiamo

$$\frac{1}{1+n^a} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^a}$$

e quindi la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ se e solo se $a > 1$.

Svolgimento di d. Indichiamo con $f_{n,a}(x)$ il termine generale della serie data. Mostreremo che la tesi segue dal criterio di Weierstrass. Poiché $f_{n,a}$ è pari, è sufficiente calcolare $\sup_{x\geq 0}|f_{n,a}(x)|$ e $\sup_{0\leq x\leq 1}|f_{n,a}(x)|$. Cerchiamo i punti estremanti in $x \geq 0$. Un semplice calcolo mostra che

$$f'_{n,a}(x) = \frac{nx^{n-1}(n^a - x^{2n})}{(x^{2n}+n^a)^2};$$

il punto di massimo di $f_{n,a}$ è $n^{a/2n}$. Perciò

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|f_{n,a}(x)\bigr| = f_{n,a}(n^{a/2n}) = \frac{1}{2n^{a/2}}.$$

Ora, se $a > 2$ la serie $\sum_n 1/(2n^{a/2})$ è convergente. Per il criterio di Weierstrass la serie $\sum_n f_{n,a}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Osserviamo che il punto di massimo di $f_{n,a}$ è in $(1,\infty)$ e che $f_{n,a}$ è crescente in $[0,1]$. Ne deduciamo che

$$\sup_{x\in[-1,1]}\bigl|f_{n,a}(x)\bigr| = f_{n,a}(1) = \frac{1}{1+n^a}.$$

Ora, se $a > 1$, la serie $\sum_n 1/(1+n^a)$ è convergente. Per il criterio di Weierstrass la serie $\sum_n f_{n,a}$ converge uniformemente in $(-1,1)$.

Notiamo, infine, che se $a \leq 1$, la serie non converge puntualmente in -1 e in 1; *a fortiori* essa non può ivi convergere uniformemente.

Esercizio 2.0.7. *Si consideri la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(1-\frac{n}{x}\sin\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr)\Bigr)^{\alpha} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si determinino, in dipendenza del parametro reale α*,* *a. l'insieme di convergenza puntuale;*

b. l'insieme di convergenza uniforme.

c. Indicata con $f(x)$ la somma della serie nell'insieme di convergenza puntuale, si calcoli, quando esiste, il valore del $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Svolgimento di a. Se $x \neq 0$, allora

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{\alpha} &= \left(1 - \frac{n}{x}\left(\frac{x}{n} - \frac{x^3}{6n^3} + o\big(n^{-3}\big)\right)\right)^{\alpha} \\ &\sim \frac{x^{2\alpha}}{(6n^2)^{\alpha}}\end{aligned}$$

per n tendente a ∞. Quindi la serie data converge puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se e solo se $\alpha > 1/2$.

Svolgimento di b. Il termine generale della serie è una funzione pari. Osserviamo che il "cambiamento di variabile" $x/n = t$ assicura che

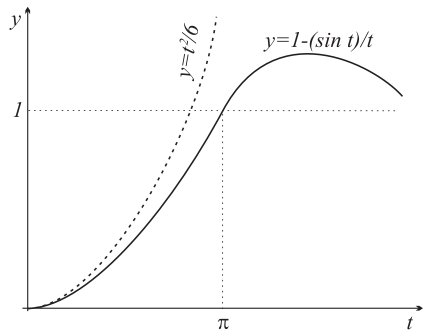
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|1 - \frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{\alpha} = \sup_{t>0}\left|1 - \frac{\sin t}{t}\right|^{\alpha}.$$

Notiamo che il secondo membro è > 1, perché α è positivo e, come si verifica facilmente,

$$\sup_{t>0}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) > 1.$$

Quindi la condizione necessaria di convergenza è violata e la serie data non converge uniformemente in $\mathbb{R}^+$, e quindi in $\mathbb{R}$.

Studiamo la convergenza uniforme in $(0, M]$, con $M > 0$. Si osservi che la funzione $t \mapsto 1 - (\sin t)/t$ è crescente in $(0, \pi]$ e che $0 < 1 - (\sin t)/t < t^2/6$ (si utilizzi il polinomio di McLaurin).



Cambiando variabile $(x/n = t)$

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(0,M]}\left|1 - \frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{\alpha} &= \sup_{t\in(0,M/n]}\left|1 - \frac{\sin t}{t}\right|^{\alpha} \\ (\text{se } M/n \le \pi) \qquad &\le \left(1 - \frac{\sin(M/n)}{(M/n)}\right)^{\alpha} \\ &\le \frac{C}{n^{2\alpha}}.\end{aligned}$$

Poiché $\sum_n n^{-2\alpha}$ converge per ogni $\alpha > 1/2$, la serie data converge uniformemente in $(0, M]$ per ogni $M > 0$, in virtù del criterio di Weierstrass. Poiché il termine generale della serie data è una funzione pari, possiamo concludere che la serie data converge uniformemente in $[-M, 0) \cup (0, M]$ per ogni $M > 0$.

Svolgimento di c. Sia

$$f_{n,\alpha}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{n}{x} \sin(\frac{x}{n})\right)^{\alpha} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Le funzioni $f_{n,\alpha}$ sono continue in $\mathbb{R}$. Si verifica facilmente, utilizzando le considerazioni svolte nei punti precedenti, che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}$ converge uniformemente in $[-M, M]$ per ogni $\alpha > 1/2$ e per ogni $M > 0$.
Quindi la funzione somma f_α è continua e

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f_\alpha(x) &= \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} f_{n,\alpha}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esercizio 2.0.8. *Si consideri la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{(2+\sin x)^{n^2}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a. Si dimostri che essa converge semplicemente in $\mathbb{R}$*;*

b. si stabilisca se la convergenza è uniforme nell'intervallo $[0, \pi]$*;*

c. si stabilisca se la convergenza è uniforme nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Svolgimento di a. Se $x \neq 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, allora

$$\left| \frac{\sin(2nx)}{(2+\sin x)^{n^2}} \right| \leq \frac{1}{(2+\sin x)^{n^2}} \leq \frac{1}{(2+\sin x)^{n}}.$$

Poiché $1 < 2 + \sin x \leq 3$, la serie $\sum_n 1/(2+\sin x)^n$ converge; per il criterio del confronto, la serie data converge assolutamente, e, *a fortiori*, semplicemente.
Se $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, il termine generale della serie è identicamente nullo.
Riassumendo, la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$.

Svolgimento di b. Osserviamo che

$$\sup_{x\in[0,\pi]} \left| \frac{\sin(2nx)}{(2+\sin x)^{n^2}} \right| \leq \frac{1}{2^{n^2}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

La serie $\sum_n 2^{-n}$ converge. Per il criterio di Weierstrass, la serie data converge uniformemente in $[0, \pi]$.

Svolgimento di c. Studiamo ora la convergenza uniforme in $[-\pi, 0]$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$f(x) = 2 + \sin x \qquad \text{e} \qquad f_n(x) = \sin(2nx).$$

Consideriamo gli sviluppi di Taylor di f e di f_n centrati in $-\pi/2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2+o\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2\right), \\ f_n(x) &= 2n(-1)^n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+o\left(x+\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Sia $\delta>0$ tale che per ogni x in $[-\pi/2-\delta,-\pi/2+\delta]$ valgano le stime seguenti

$$\begin{aligned} &1+\frac{1}{3}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2 \le |2+\sin x| \le 1+\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2, \\ &n\left|x+\frac{\pi}{2}\right| \le |\sin(2nx)| \le 3n\left|x+\frac{\pi}{2}\right|. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[-\pi,0]}\left|\frac{\sin(2nx)}{(2+\sin x)^{n^2}}\right| &\ge \sup_{-\pi/2-\delta\le x\le -\pi/2+\delta}\left|\frac{\sin(2nx)}{(2+\sin x)^{n^2}}\right| \\ &\ge \sup_{-\pi/2-\delta\le x\le -\pi/2+\delta}\frac{3n\,|x+\pi/2|}{\left(1+\left(x+\pi/2\right)^2/3\right)^{n^2}} \\ &\ge \sup_{t\in[0,\delta]}\frac{3nt}{\left(1+t^2/3\right)^{n^2}}. \end{aligned}$$

Sia $g_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $g_n(t)=3nt(1+t^2/3)^{-n^2}$. Calcoliamo

$$g_n'(t)=\frac{n(3+t^2-2n^2t^2)}{\left(1+t^2/3\right)^{n^2+1}}.$$

Un analisi degli zeri e del segno di g_n' mostra che il punto di massimo assoluto di g_n è $\sqrt{3/(2n^2-1)}$. Per n abbastanza grande, questo punto cade nell'intervallo $[0,\delta]$. Conseguentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-\pi,0]}\left|\frac{\sin(2nx)}{(2+\sin x)^{n^2}}\right| &\ge \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,\delta]} g_n(t) \\ &= \lim_{n\to\infty} g_n\big(\sqrt{3/(2n^2-1)}\big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n\sqrt{\dfrac{3}{2n^2-1}}}{\left(1+\dfrac{1}{2n^2-1}\right)^{n^2}} \\ &= 3\sqrt{\frac{3}{2e}}. \end{aligned}$$

Quindi la serie non converge uniformemente in $[-\pi,\pi]$.

2.1 Serie di potenze

Esercizio 2.1.1. *Si determinino il raggio di convergenza, l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme delle seguenti serie:*

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^{-n}\,x^n$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\log(1+n))^{-1}\,x^n$

Svolgimento di a. Sia $a_n = (n^{1/n}-1)^{-n}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^{1/n}-1\right)^n}{\left((n+1)^{1/(n+1)}-1\right)^{n+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^{1/(n+1)}-1}\left(\frac{n^{1/n}-1}{(n+1)^{1/(n+1)}-1}\right)^n\\ &= \infty\cdot(\infty)=\infty.\end{aligned}$$

Quindi il raggio di convergenza è nullo e la serie converge solo per $x=0$.

Svolgimento di b. Essendo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(2+n)}{\log(1+n)}=1,$$

il raggio di convergenza è 1. Studiamo il comportamento della serie di potenze agli estremi dell'intervallo di convergenza. In 1 abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{\log(1+n)}=\infty,$$

e in -1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(1+n)},$$

che converge per il teorema di Leibniz. Quindi l'insieme di convergenza semplice è $[-1,1)$. Inoltre la serie di potenze data converge uniformemente in $[-1,\alpha]$, per ogni $-1<\alpha<1$.

Esercizio 2.1.2. *Si calcolino, con un errore inferiore a 10^{-2}, i seguenti integrali:*

a. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\,\mathrm{d}x$

Svolgimento di a. Sia $f(x)=(1-\cos x)/x$; f è continua in $(0,\pi/2]$ e $f(x)\sim x/2$ per $x\to 0$. Perciò f è integrabile in $[0,\pi/2]$. Poiché la funzione $x\mapsto\cos x$ è analitica in $\mathbb{R}$ e

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n},$$

semplici calcoli mostrano che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

Si osservi che il raggio di convergenza della serie di potenze ottenuta è ∞ e quindi f è analitica in $\mathbb{R}$. Poiché la serie di potenze converge uniformemente in $[0, \pi/2]$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x}\, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n-1}\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \int_0^{\pi/2} x^{2n-1}\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \left[\frac{x^{2n}}{2n}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}.
\end{aligned}$$

Per la stima (2.1) nel teorema di Leibniz 2.1

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x}\, \mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \right| \le \frac{1}{2N(2N)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2N} \qquad N \ge 2.$$

Se $N = 3$, abbiamo $\frac{1}{2N(2N)!}(\frac{\pi}{2})^{2N} < 10^{-2}$: quindi una stima dell'integrale assegnato, con errore inferiore a 10^{-2}, è

$$\sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}.$$

Svolgimento di c. Sia $f(x) = (e^x - e^{-x})/(2x)$. Per $x \to 0$, abbiamo $f(x) \sim 1$ e quindi f integrabile in $[0, 1]$. Essendo la funzione esponenziale analitica in $\mathbb{R}$ e

$$e^x = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

abbiamo che

$$f(x) = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} x^n - \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) = \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \ge 0 \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

Si osservi che il raggio di convergenza della serie di potenze ottenuta è ∞ e quindi f è analitica in $\mathbb{R}$. Poiché questa serie di potenze converge uniformemente in $[0, 1]$, possiamo scrivere

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2x}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n}\, \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!};$$

per ogni N fissato vogliamo ottenere una stima del tipo $a_{N+k} \leq a_N (A_N)^k$ per ogni k intero positivo e dove A_N è una costante:

$$\begin{aligned} a_{N+k} &= \frac{1}{(2N+2k+1)(2N+2k+1)(2N+2k)\dots(2N+2)(2N+1)!} \\ &\leq \frac{1}{(2N+1)(2N+2)^{2k}(2N+1)!} \\ &= \frac{a_N}{(2N+2)^{2k}}. \end{aligned}$$

Se N è positivo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=N}^{\infty} a_j &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k} \\ &\leq a_N \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2N+2} \right)^{2k} \\ &= \frac{a_N}{1-(2N+2)^{-2}} \\ &= \frac{(2N+2)^2 - 1}{(2N+2)^2(2N+1)(2N+1)!}; \end{aligned}$$

quest'ultima espressione è minore di 10^{-2} se $N > 2$. Perciò possiamo stimare l'integrale richiesto con

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} = \frac{19}{18}.$$

Esercizio 2.1.3. *Si determinino l'insieme di convergenza semplice, gli insiemi di convergenza uniforme e la somma delle seguenti serie:*

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n-1)!}$

Svolgimento di c. Sia $a_n = 1/[n(n+1)]$. Il raggio di convergenza della serie di potenze è 1 perché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Nei punti 1 e -1 abbiamo rispettivamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)},$$

che sono entrambe convergenti. La serie di potenze data converge uniformemente in $[-1,1]$.

Osserviamo che la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}/(n+1)$ converge uniformemente in $[-1,1)$. Per ogni $x \in [-1,1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\,\frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
\text{(conv. uniforme)} \qquad &= \int_0^x \left(\frac{1}{t^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^x \left(\frac{1}{t^2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-t)^n\right) \mathrm{d}t \\
\left(\text{essendo } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n/n = \log(1+t)\right) \qquad &= -\int_0^x \frac{\log(1-t)+t}{t^2}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

che rappresenta la somma della serie di potenze in $[-1,1)$. Si osservi che $(\log(1-t)+t)/t^2 \sim -1/2$ per $t \to 0$ e, quindi, non c'è alcun problema di integrabilità.

Svolgimento di e. Sia $a_n = n^2/(n-1)!$. Il raggio di convergenza della serie di potenze data è ∞, perché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0.$$

La serie data converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e uniformemente in ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, possiamo scegliere un insieme contenente x in cui abbiamo convergenza uniforme; allora

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n-1)!} &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}\, n x^{n-1} \\
&= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}\, \mathrm{D}\left(x^n\right) \\
&= x \cdot \mathrm{D}\left(x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, n x^{n-1}\right) \\
&= x \cdot \mathrm{D}\left(x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, \mathrm{D}\left(x^n\right)\right) \\
&= x \cdot \mathrm{D}\left[x \cdot \mathrm{D}\left(x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x \cdot \mathrm{D}\left[x \cdot \mathrm{D}\left(xe^x\right)\right] \\
&= e^x(x + 3x^2 + x^3),
\end{aligned}
$$

che è la somma richiesta.