

Esercizi: integrali in piú variabili.

Versione del 22 dicembre 2020

Indice

1 Integrali propri	1
1.1 Integrali doppi	1
1.2 Integrali tripli	3
2 Integrali impropri	5
3 Esercizi vari	6

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).
Gli esercizi con “*” sono piú difficili degli altri !

1 Integrali propri

1.1 Integrali doppi

1. Si calcoli

$$\int_A \frac{\cos y^2}{y} dx dy$$

in

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2, 0 < y \leq \sqrt{\pi/2} \right\}.$$

[1/2.]

2. Si calcoli

$$\int_D \frac{y^3}{x} dx dy$$

in

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2y \leq 4x, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\}.$$

[45/32.]

3. Si calcoli

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{D_a} \frac{x}{y(1+y^2)} dx dy$$

con

$$D_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} \leq y \leq 2x^2, a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{a} \right\}.$$

[0.]

4. Si calcoli

$$\int_{B(0,1)} (x+y) \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

[0.]

5. Si calcoli l'area dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

[πab .]

6. Si calcoli

$$\int_D xy \cos(xy) \, dx \, dy$$

in

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, \frac{2}{x}\pi \leq y \leq \frac{3}{x}\pi, x > 0 \right\}.$$

7. Si calcolino

$$\int_{\{|x|+|y|\leq 1\}} e^{x+y} \, dx \, dy, \quad \int_{\{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\leq 1\}} xe^{|x|+y} \, dx \, dy.$$

[$e - 1/e, 0$.]

8. Si calcoli

$$\int_D \frac{x^2}{y} e^{xy} \, dx \, dy$$

in

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x}, 2x^2 \leq y \leq 3x^2 \right\}.$$

[$(e - \sqrt{e})/18$.]

9. Si calcoli

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{D_r} \frac{x+1}{y} \, dx \, dy$$

con

$$D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq r^2, 0 \leq x \leq y^2, r \leq y \leq 1\}.$$

[$5/8$.]

10. Si calcoli

$$\int_D \frac{xy}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

$$\text{con } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}.$$

[0 .]

11. Si calcoli

$$\int_D \frac{xy}{x^2 + 2y^2} \, dx \, dy$$

$$\text{con } D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 9, x^2 + y^2 \geq 1, \sqrt{3}x < y < \frac{x}{\sqrt{3}} \right\}.$$

[$18/35 - (\log(7/5))/4$.]

12. Si calcoli

$$\int_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \, dx \, dy$$

$$\text{con } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}.$$

[$2 \sin 1$.]

13. Si calcoli

$$\int_D \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2} dx dy$$

con $D = [-2, 2]^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

[$-8 + 4\pi + 8 \ln 2$.]

14. Si calcoli

$$\int_{B((1,0),1) \cap B((0,1),1)} \|(x, y)\|_2^2 dx dy.$$

[$4(8 - 5\sqrt{2})/9$.]

15. Si calcoli

$$\int_D x|y| dx dy$$

con $D = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} : x^3 \leq |y| \leq \sqrt[3]{|x|}\}$.

[$-1/8$.]

16. Si calcoli l'area della regione delimitata dalle curve $yx = 2$, $y = x$ e $y = 3x$.

[$2 \ln 3$.]

17. Si determinino gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste finito

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^\alpha e^{-r} \int_{\{|x|+|y| \leq r\}} e^{x+y} dx dy.$$

[$\alpha \leq -1$.]

1.2 Integrali tripli

1. Si calcoli il volume della porzione di cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

compresa tra i piani $z = 0$ e $3x + 7y - 21z + 11 = 0$.

[π .]

2. Si calcoli il volume del "toro" di raggio maggiore R e raggio minore r (con $0 < r < R$), cioè del solido che si ottiene ruotando intorno all'asse z l'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-R)^2 + z^2 \leq r^2, y = 0\}.$$

[$2\pi^2 r^2 R$.]

3. Si calcoli il volume di una piramide retta a base quadrata con lato l e altezza h .

[$l^2 h/3$.]

4. Si calcoli il volume di

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq y \leq 2, x \geq \frac{1}{2}, 0 \leq z \leq |\log(xy)| \right\}.$$

[$(2\sqrt{2} + 17/8) \log 2 - 8\sqrt{2}/3 + 3/4$.]

5. Si calcoli

$$\int_D \frac{1}{(x+1)^3} dx dy dz$$

con

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 1, 0 < z < 1, 0 < x < y + z\}.$$

6. Si calcoli il volume di

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9(2 - \sqrt{y^2 + z^2})^2 \leq 1\}.$$

[$2\pi^2/3$.]

7. Si calcoli

$$\int_{B(\mathbf{0},1)} \sqrt[3]{x+y+z} \, dx \, dy \, dz.$$

[0.]

8. Si calcoli

$$\int_A x_3 \cos(x_1 + x_2 + x_3) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3.$$

$$\text{su } A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} \leq 1\}.$$

[0.]

9. Si calcoli

$$\int_D y(x + e^x) \, dx \, dy \, dz$$

con

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 + 1 \geq 0, |y| \leq 1 - x^2\}.$$

[0.]

10. Si calcoli

$$\int_E \sqrt{|z|} \, dx \, dy \, dz$$

con

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \leq 0\}.$$

[$4\pi/21$.]

11. Si calcoli il volume dell'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

[$4\pi abc/3$.]

12. Si calcoli il volume del solido i cui punti (x, y, z) proiettati sul piano $z = 0$ sono compresi nel parallelogramma di vertici $(2, 1)$, $(6, -1)$, $(7, 0)$ e $(3, 2)$ e tali che $0 \leq z \leq e^{x+2y}$.

[$2(e^7 - e^4)$.]

13. Si calcoli il volume di

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > x^2, z > y^2, x > z^2\}.$$

[$1/7$.]

14. Si calcoli

$$\int_D (x + z) \, dx \, dy \, dz,$$

ove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

[$1/12$.]

15. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il cono retto con raggio di base 1 e altezza 2, avente nell'origine il centro del cerchio di base e l'altezza sull'asse z . Si calcoli il volume di C e

$$\int_C (|x| + |y| + |z|) \, dx \, dy \, dz.$$

[$2\pi/3, (4 + \pi)/3$.]

2 Integrali impropri

1. Si calcoli

$$\int_D \frac{e^x}{1+y^2} dx dy$$

$$\text{con } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq e^{-|x|}\}.$$

[$+\infty$.]

2. Si calcoli

$$\int_D \frac{1}{x} \log y dx dy$$

$$\text{con } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \sqrt{y} < x < 1\}.$$

[-1 .]

3. Al variare di $\alpha > 0$ si calcoli, se esiste,

$$\int_D y^\alpha dx dy$$

$$\text{con } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y|\sqrt{x} \leq 1 \leq x\}.$$

[Esiste se $\alpha = n/m > 1$, con n e m primi tra loro e m dispari; se n dispari vale 0 , se n pari vale $4/(\alpha^2 - 1)$.]

4. Stabilire se il solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z < |\log y|, 0 < y < 1\}$$

ha volume finito.

[$\pi/2$.]

5. Si consideri, per ogni $\alpha \geq 0$, l'insieme

$$\Omega_\alpha = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2) < e^{\alpha t}, t \geq 0\}.$$

Si determinino gli α per cui

$$\int_{\Omega_\alpha} \frac{x^2 + t^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy dt < \infty.$$

[$\exists \alpha$.]

6. Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$T = \{(x, y, z) : z \geq 0, z\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$

Si disegni l'insieme T e si stabilisca se il seguente integrale esiste finito

$$\int_T \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} + 1) e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}} - \sqrt{x^2 + y^2} e^{-z^2}}{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

[*Si*.]

7. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha (e^z + e^{-z})} dx dy dz$$

[$\alpha > 1$.]

8. Si stabilisca se esiste finito e, in caso affermativo lo si calcoli,

$$\int_{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^4\}} \frac{|z|^3}{\sqrt{x^2 + y^2} (1 + x^2 + y^2 + z^4)^2} dx dy dz$$

[$\sqrt{2}\pi^2/4$.]

3 Esercizi vari

1. Sia

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + \sqrt{(x^2 + y^2)^5}}$$

Si calcolino, quando esistono,

- $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(\mathbf{0}, r)} f(x, y) \, dx \, dy;$
- $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy;$
- $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B((0, r), 2r)} f(x, y) \, dx \, dy.$

[a. 0; b. 0; c. 0.]

2.* Si calcoli

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} e^{-r} \int_{B(\mathbf{0}, r)} e^{|x|+|y|} \, dx \, dy$$

[$+\infty$.]

3.* Si provi che

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{B(\mathbf{0}, r)} \frac{1}{1 + x^2 + |y|} \, dx \, dy = \infty$$

4. Si calcoli

$$\int_A xyz \, dx \, dy \, dz$$

con $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

[7/360.]

5. Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ il tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

- Si determini il volume di T ;
- si calcoli, al variare di $\alpha \geq 0$

$$\int_T (1 - x - y - z)^\alpha \, dx \, dy \, dz$$

c.* si determini per quali valori di α , con $\alpha > 1$, esiste finito

$$\int_T \frac{1}{(1 - x - y)(1 - x^2 - y^2)^\alpha} \, dx \, dy \, dz$$

[b. $1/[(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)]$; c. $1 < \alpha < 2$.]

6. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} -n^\alpha & \text{se } (x, y) \in B(\mathbf{0}, n) \setminus B(\mathbf{0}, n-1) \text{ con } n \text{ pari} \\ n^\alpha & \text{se } (x, y) \in B(\mathbf{0}, n) \setminus B(\mathbf{0}, n-1) \text{ con } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Si determini α reale tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(\mathbf{0}, n)} f(x, y) \, dx \, dy$$

esista finito.

[$\alpha < -1$.]

7. Per ogni α positivo si consideri la regione

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0, x \leq y^\alpha, y \geq 0\}.$$

Si determinino gli α per i quali esiste finito

$$\int_{D_\alpha} y e^{-y^2+x} dx dy.$$

[$0 < \alpha < 2$.]

8. Per ogni $\alpha > 0$ sia

$$\int_{\Omega_\alpha} \frac{y^3 e^{\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}}{z} dx dy dz,$$

dove

$$\Omega_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{-\alpha}\}.$$

Determinare i valori di α per i quali l'integrale esiste finito e, per questi valori, calcolarlo.

[\exists se e solo se $\alpha > 2$ e vale 0.]

9. Si calcoli

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$$

ove $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{|x|} + \sqrt[3]{|y|} \leq R\}$.

[∞ .]

10.* Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^4 + |y|^3}.$$

a. Si provi che

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = 0;$$

b. si provi che

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$$

non esiste.

11. Si calcoli

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{D_a} \frac{|x|}{y(1+y^2)} dx dy$$

con

$$D_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} \leq y \leq 2x^2, a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{a} \right\}.$$

[$(3\pi)/4$.]

12. Al variare di $\alpha > 0$ si stabilisca se esiste finito

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy$$

ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < x < 2y^2, -1 < y < 1\}$. In particolare, lo si calcoli per $\alpha = 1$.

[$\alpha < 5/2, \log(5/2) + \arctan 2 - \pi/2$.]

13. Al variare di α , quando é integrabile $f(x, y) = \frac{y^\alpha \log^3 y}{x^2 y + 1}$ in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x > 0\}$?
[$-2 < \alpha < -1/2$.]

14. Si verifichi che $f(x, y, z) = \frac{xyz}{(y^2 + z^2)^2}$ é integrabile in

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y < x^2 + y^2 < x < z\}$$

e si calcoli

$$\int_D f(x, y, z) dx dy dz.$$

[$-1/32$.]

- 15*. Si stabilisca se

$$f(x, y, z) = \frac{x}{(z + \sqrt{x^2 + y^2})^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

é integrabile in $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < x^2 + y^2 < y, z^2 < x^2 < 3y^2\}$. In caso affermativo si calcoli

$$\int_D f(x, y, z) dx dy dz.$$

16. Si stabilisca, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrabilitá di

$$f_\alpha(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^\alpha}$$

in $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| > 1, z < 0\}$. Si calcoli poi

$$\int_D f_{1/2}(x, y, z) dx dy dz.$$

[$\alpha \in (0, 1), \pi^2$.]

17. Siano R e h positivi e fissati.

a. Si calcoli il volume del cono

$$C_{R,h} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \left(\frac{Rz}{h}\right)^2, 0 \leq z \leq h \right\}.$$

b. Si stabilisca, al variare di α intero, quando esiste finito

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{C_{R,h}} x^\alpha dx dy dz.$$

[a. $\pi R^2 h / 3$.]

18. Si stabilisca, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quando esiste finito

$$\int_D (x^2 + y^2)^{\alpha/2} \log[z^2(x^2 + y^2)] dx dy dz$$

ove

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1 \right\}.$$

[$\alpha < -1$.]

19. Si stabilisca, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quando esiste finito

$$\int_D z^\alpha dx dy dz$$

ove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > x^2, z > y^2, x > z^2\}.$$

[$\alpha > -7/4$.]

20. Sia

$$f_\alpha(x, y, z) = \frac{(xy + yz + xz)^\alpha}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5} \left(\log^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \right)}.$$

a. Si stabilisca, al variare di α intero e positivo, quando esiste finito

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_\alpha(x, y, z) \, dx \, dy \, dz;$$

b. si calcoli

$$\int_{\mathbb{R}_+^3 \setminus B(\mathbf{0}, 1)} f_1(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad [a. \alpha = 1; b. \pi/2.]$$

21*. Dopo aver verificato che esiste finito

$$\int_D \frac{y}{(z+1) \sqrt[4]{(x^2 + y^2)^5}} \, dx \, dy \, dz,$$

ove $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, 0 < z < \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 + y^2} < z + 1 \right\}$, lo si calcoli.

[0.]

22*. Sia $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > \max(\sqrt{x}, x^2) \right\}$. Si verifichi che

$$\int_D \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx \, dy = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.$$

23. Sia $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1 \right\} \setminus B_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{0}, 1)$ e α reale fissato, $\alpha \neq 2$.

a. Si determinino i valori di α per cui

$$\int_D x^\alpha \, dx \, dy$$

è definito ed esiste finito;

b. si calcoli il precedente integrale nei casi $\alpha = -\frac{17}{13}$ e $\alpha = 0$.

[a. $\{\alpha = -m/n : \alpha > -3, \alpha \neq -2, m, n \in \mathbb{N} \text{ con } m \text{ pari se } n \text{ dispari}\} \cup [0, \infty)$; b. $0, 4/3 - \pi/4$.]

24. Si stabiliscano i valori di α reale per i quali la funzione $|g(x, y)|^\alpha$ è integrabile su

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{2x}, y \geq -x^2 \right\},$$

con

$$g(x, y) = \ln \left(\frac{x^2}{|y|} \right) e^{xy}.$$

[nessuno.]

25. Si stabilisca se

$$f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2 \sqrt{|x+y|}}$$

è integrabile su

$$D = [\mathbb{R}^2 \setminus B(\mathbf{0}, 1)] \cap \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

[si.]