Analisi Matematica II
corsi di Laurea in Fisica e Matematica
prove scritte, a.a. 2014/2015

Seconda prova parziale, 4 febbraio 2015

Versione A

1. Data la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$

(i) si determini e^{tA}.

(ii) Si scriva l'integrale generale del sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x' = x + e^t, \\ y' = 3x - 2y + t^2. \end{cases}$$

2. Sia Σ l'insieme ottenuto ruotando di un giro completo intorno all'asse y il sostegno della curva $\gamma(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t, 0)$, $t \in [0, \pi/2]$. Si determini una superficie regolare φ con sostegno $\varphi^* = \Sigma$ e se ne calcoli l'area.

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sin\left(\frac{2\,\pi\, y(x)}{1+y^2(x)}\right), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che ammette un'unica soluzione φ definita su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Si dimostri che esistono i limiti $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ e li si calcoli.

(iii) Si discuta l'esistenza di punti di flesso di φ.

(iv) Si disegni un grafico qualitativo di φ.

4.

(i) Si dimostri che la relazione $F(x, y) = e^{\tan(x+y)} - x - 3y - 1 = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una funzione $y = f(x)$ tale che $F(x, f(x)) = 0$.

(ii) Si stabilisca se la funzione f ammette in $x = 0$ un punto di massimo o minimo locale (Suggerimento: può essere utile dimostrare prima che $e^{\tan t} - t - 1 \geq 0$ per ogni $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Versione B

1. Data la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

(i) si determini e^{tA}.

(ii) Si scriva l'integrale generale del sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x' = -2x + 3y + t^2, \\ y' = y + e^t. \end{cases}$$

2. Sia Σ l'insieme ottenuto ruotando di un giro completo intorno all'asse x il sostegno della curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, 0)$, $t \in [0, \pi/2]$. Si determini una superficie regolare φ con sostegno $\varphi^* = \Sigma$ e se ne calcoli l'area.

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sin\left(\frac{2\,\pi\, y(x)}{1+y^2(x)}\right), \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che ammette un'unica soluzione φ definita su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Si dimostri che esistono i limiti $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ e li si calcoli.

(iii) Si discuta l'esistenza di punti di flesso di φ.

(iv) Si disegni un grafico qualitativo di φ.

4.

(i) Si dimostri che la relazione $F(x, y) = x+3y-e^{\tan(x+y)}+1 = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una funzione $y = f(x)$ tale che $F(x, f(x)) = 0$.

(ii) Si stabilisca se la funzione f ammette in $x = 0$ un punto di massimo o minimo locale (Suggerimento: può essere utile dimostrare prima che $e^{\tan t} - t - 1 \geq 0$ per ogni $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

4 febbraio 2015

Versione A

1. Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{e^{nx}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Si discutano la continuità e la differenziabilità della funzione
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\sqrt{y}\sqrt{x}}{x+y^2}, & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0, \\ 0, & \text{se } x \le 0 \text{ o } y \le 0. \end{cases}$$

3. Sia Σ l'insieme ottenuto ruotando di un giro completo intorno all'asse y il sostegno della curva $\gamma(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t, 0)$, $t \in [0, \pi/2]$. Si determini una superficie regolare φ con sostegno $\varphi^* = \Sigma$ e se ne calcoli l'area.

4. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = \sin\left(\frac{2\,\pi\, y(x)}{1+y^2(x)}\right), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che ammette un'unica soluzione φ definita su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Si dimostri che esistono i limiti $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ e li si calcoli.

(iii) Si discuta l'esistenza di punti di flesso di φ.

(iv) Si disegni un grafico qualitativo di φ.

Versione B

1. Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^3} e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Si discutano la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x}\sqrt{y}}{x^2+y}, & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \text{ o } y \leq 0. \end{cases}$$

3. Sia Σ l'insieme ottenuto ruotando di un giro completo intorno all'asse x il sostegno della curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, 0)$, $t \in [0, \pi/2]$. Si determini una superficie regolare φ con sostegno $\varphi^* = \Sigma$ e se ne calcoli l'area.

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sin\left(\frac{2\pi y(x)}{1+y^2(x)}\right), \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che ammette un'unica soluzione φ definita su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Si dimostri che esistono i limiti $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ e li si calcoli.

(iii) Si discuta l'esistenza di punti di flesso di φ.

(iv) Si disegni un grafico qualitativo di φ.

18 febbraio 2015

1. Si determinino i punti di massimo e di minimo (locale e globale) della funzione

$$f(x,y) = (1+xy)e^{-x^2-y^2}$$

sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2+y^2 \leq 1\}$.

2. Si calcoli

$$\int_A \frac{x^2}{2x^2+y^2-2xy}\, dx\, dy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 1 \leq x \leq 2, \; y \geq 0 \text{ e } xy \leq 1\}$.

3. Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, (x^2+y^2)(x^2+y^2-2x+1) \neq 0\}$ e, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\omega_\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^2)^\star$ definita come

$$\omega_\alpha(x,y) = \left(-\frac{\alpha y}{x^2+y^2-2x+1} + \frac{x}{x^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{\alpha(x-1)}{x^2+y^2-2x+1} + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dy.$$

(i) Si stabilisca per quali valori di α la forma differenziale ω_α è chiusa e per quali è esatta.

(ii) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si calcoli $\int_\gamma \omega_\alpha$ dove $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\gamma(t) = \left(t, \frac{2t}{1+t^2} + 2\right)$.

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{|y(x)(1+y(x))|}{(1+e^x)(1+y^2(x))} \\ y(0) = \beta. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, il problema ammette un'unica soluzione y_β e se ne discuta la prolungabilità.

(ii) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, si studi il comportamento della soluzione ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza.

22 giugno 2015

1.

(i) Si scriva l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \frac{e^{2x}}{4x}.$$

(ii) Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \frac{e^{2x}}{4x} \\ y(1) = \frac{1}{4}e^2 \\ y'(1) = e^2. \end{cases}$$

2.

(i) Si calcoli l'area (misura 2-dimensionale secondo Peano-Jordan) dell'insieme

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : \ (y^2 + z^2)^2 \leq z^2 - y^2, \ y \geq 0, \ z \geq 0\}.$$

(ii) Sia A l'insieme ottenuto ruotando D di un giro completo intorno all'asse z. Si determini una superficie regolare φ con sostegno $\varphi^* = \partial A$ e si calcoli l'integrale di superficie $\int_\varphi x^2 \, d\sigma$.

3. Si discutano, al variare di $\alpha > 0$, la continuità in $(0, 0)$ e la differenziabilità in $(0, 0)$ della funzione $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x^2 + |y|^\alpha) - 1}{|x|^\alpha + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

4. Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come $f_n(x) = n\, x^n |\log(nx)|$.

22 luglio 2015

1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{1}{1+(n-x)^2}\right).$$

(i) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni f_n.

(ii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2. Si determinino i punti di massimo e di minimo (locale e globale) della funzione

$$f(x,y) = (x+\log y)^2 + |4-x^2|$$

sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

3. Si calcoli

$$\int_A |1-y| \, dx \, dy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2-y, \ y \ge 0 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \ge 1\}$.

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)e^{x+y(x)}}{\sqrt{1-y^2(x)}}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Si discutano, al variare di $\alpha \in (-1,1)$, l'esistenza, l'unicità e la prolungabilità della soluzione. Al variare di $\alpha \in (-1,1)$, si studi inoltre il comportamento delle soluzioni ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza.

16 settembre 2015

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = |x| + \sin(3x) \quad \text{se } x \in (-\pi, \pi]$$

e f sia periodica di periodo 2π su $\mathbb{R}$. Si scriva la serie di Fourier di f e se ne discutano convergenza puntuale e uniforme.

2. Si calcoli

$$\iiint_D \frac{y^4 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\, dx\, dy\, dz$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$.

3. Si discutano la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy\, e^{-\frac{1}{(x+y)^2}}}{x^2 + 2e^{-\frac{2}{(x+y)^2}}}, & \text{se } x \neq -y, \\ 0, & \text{se } x = -y. \end{cases}$$

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\sin(y(x))}{1 + \cos^2(y(x))}, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che ammette un'unica soluzione φ definita su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Si dimostri che esistono i limiti $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x)$ e li si calcoli.

(iii) Si discuta l'esistenza di punti di flesso di φ.

(iv) Si disegni un grafico qualitativo di φ.