Note di matematica
Discussione sulla risoluzione di disequazione esponenziali con termine noto esponenziale e incognita

Giuseppe Vittucci Marzetti*

20 novembre 2020

Consideriamo la seguente disequazione, esempio di disequazione esponenziale con termine noto esponenziale e con incognita già ricondotta alla forma normale:

$$2^{2+x} > 3^x \tag{1}$$

Premesso che nelle (dis)equazioni esponenziali di questo tipo, quando applicate i logaritmi non avete mai problemi di condizioni di esistenza del logaritmo avendo il logaritmo come argomento un'esponenziale ed essendo questa una funzione strettamente positiva ($a^{f(x)}$, dove $a > 0$, non assume mai valori negativi), la disequazione (1) può essere risolta in diversi modi.

Il primo modo consiste nell'applicare prima il logaritmo naturale (o il log con una qualsiasi base maggiore di 1 in modo da mantenere invariato il verso della disequazione) e sfruttare le proprietà dei logaritmi:

$$\begin{aligned}
\ln 2^{2+x} &> \ln 3^x \\
(2+x)\ln 2 &> x \ln 3 \\
2 + x &> x\frac{\ln 3}{\ln 2} \\
\left(1 - \frac{\ln 3}{\ln 2}\right) x &> -2 \\
x &< \frac{-2}{1 - \frac{\ln 3}{\ln 2}} = \frac{2}{\frac{\ln 3}{\ln 2} - 1} = \frac{2}{\log_2 3 - 1}
\end{aligned}$$

Rispetto ai diversi passaggi, prestate attenzione al fatto che, quando si dividono ambo i membri per $\ln 2$ il verso della disequazione non cambia,

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126 Milano, Tel.: +39 02 64487457, Fax: +39 02 64487561. Email: giuseppe.vittucci@unimib.it

essendo $\ln 2 > 0$,[1], mentre, quando si divide per $(1 - \frac{\ln 3}{\ln 2})$ il verso va invertito perché questo è minore di 0.[2]

La disequazione (1) poteva anche essere risolta come segue:

$$\begin{aligned}
\log_2 2^{2+x} &> \log_2 3^x \\
2 + x &> \log_2 3^x \\
2 + x &> \frac{\log_3 3^x}{\log_3 2} \\
2 + x &> \frac{x}{\log_3 2} \\
x - \frac{x}{\log_3 2} &> -2 \\
\left(1 - \frac{1}{\log_3 2}\right) x &> -2 \\
x &< \frac{-2}{1 - \frac{1}{\log_3 2}} = \frac{2}{\frac{1}{\log_3 2} - 1} = \frac{2}{\log_2 3 - 1}
\end{aligned}$$

Anche qui è da notare che, poiché $(1 - \frac{1}{\log_3 2}) < 0$, dividendo per questo numero il verso cambia; inoltre, nell'ultimo passaggio, per mostrare l'uguaglianza della soluzione ottenuta con quella precedente si sfrutta il fatto che:

$$\log_a b = \frac{log_b b}{log_b a} = \frac{1}{log_b a}$$

Un altro modo per risolvere la disequazione (1) sfrutta il fatto che la disequazione può essere manipolata per avere due esponenti con la stessa base e il fatto che una funzione esponenziale è strettamente positiva (in

[1]Se la base è maggiore di 1 il logaritmo di qualsiasi numero maggiore di 1 restituisce un numero positivo.

[2]Se avete dubbi sul segno è sempre utile calcolare con una calcolatrice i logaritmi che potete calcolare, anche se il risultato in genere sarà solo un'approssimazione, poiché è facile i logaritmi diano luogo a numeri irrazionali, ed è questo il motivo per cui in genere i logaritmi non si calcolano subito, ma si arriva prima alla forma finale della soluzione in cui compaiono. Questo ad esempio è uno di quei casi, poiché $\log_2 3$ è un numero irrazionale e quindi potete solo approssimarlo. Perché? Ecco la dimostrazione per assurdo. Se fosse un certo numero razionale q vorrebbe dire che esistono due numeri interi m e n tali che $q = \frac{m}{n}$, ma questo non è possibile perché dovrebbe aversi:

$$\begin{aligned}
2^q &= 3 \\
2^{\frac{m}{n}} &= 3 \\
\left(2^{\frac{m}{n}}\right)^n &= 3^n \\
2^m &= 3^n
\end{aligned}$$

Ma l'ultima eguaglianza non può essere soddisfatta: poiché 3 è dispari, non è possibile moltiplicare un certo numero di volte 3 per sé stesso ottenendo un numero pari, mentre 2 moltiplicato per sé stesso un certo numero di volte è un numero pari.

particolare $2^x > 0$ per ogni x, per cui, essendo sicuri del segno è possibile dividere ambo i membri della disequazione per 2^x senza problemi sul verso della disequazione stessa):

$$\begin{aligned}
2^{2+x} &> 3^x \\
2^2 \cdot 2^x &> 3^x \\
2^2 &> \frac{3^x}{2^x} \\
\left(\frac{3}{2}\right)^x &< 4 \\
x &< \log_{\frac{3}{2}} 4
\end{aligned}$$

Qui va notato che questa soluzione è solo apparentemente diversa dalle prime due poiché si ha:

$$\frac{2}{\log_2 3 - 1} = \frac{\log_2 4}{\log_2 3 - \log_2 2} = \frac{\log_2 4}{\log_2 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} 4 \approx 3,419$$