Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Corso di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo
a.a. 2021-22 - codice corso 2122-1-F4001Q094

Docente: Andrea Calogero (andrea.calogero@unimib.it)

Pagina del corso http://www.matapp.unimib.it/~calogero/

8 CFU = 56 ore

Programma definitivo del corso 2021/22 *(in blu i modelli svolti)*

1. INTRODUZIONE AL CONTROLLO OTTIMO
   a. Formulazione di un problema di controllo ottimo
      Definizioni di controlli, dinamica, traiettorie, insieme di controllo, target set.
      Funzioni assolutamente continue. Soluzione di una equazione differenziale ordinaria con funzioni misurabili: definizione e teoremi di esistenza e unicità. Controlli ammissibili. Importanza del caso della dinamica lineare.
2. Il CONTROLLO OTTIMO CON IL METODO VARIAZIONALE
   a. Il problema più semplice di controllo ottimo
      Il teorema di Pontryagin (DIM nel caso di insieme di controllo U=R, DIM anche del lemma tecnico): definizione di Hamiltoniana e conseguenze del principio del Massimo. Controllo estremale, moltiplicatore associato. Controllo normale e abnormale: esempi di controllo ottimo abnormale. Proprietà dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (DIM, anche del lemma tecnico).
      Problemi autonomi: proprietà dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo.
      Condizioni sufficienti di ottimalità: la condizione di Mangasarian (DIM). Funzioni concave, sopragradiente, sopragradiente di funzioni differenziabili, cenni al Teorema di Rockafellar: la condizione sufficiente di Arrow (DIM).
      Condizioni di transversalità per i problemi con punti iniziali/finali fissati. Sui problemi di minimo.
      A two sector model with investment and consumption goods.
   b. Il problema più semplice di calcolo delle variazioni
      Il teorema di Eulero (DIM come caso particolare del teorema di Pontryagin). Condizioni di transversalità per i problemi con punti iniziali/finali fissati. Condizioni sufficienti per il problema più semplice usando concavità/convessità. *Curva di lunghezza minima.*
   c. Controlli singolari e bang-bang
      Definizioni di controlli bang-bang, istanti di commutazione e controlli singolari. *La costruzione di una strada di montagna a costo minimo.*
   d. Problema più generali di controllo ottimo
      Problemi di Mayer, di Bolza e Lagrange: loro equivalenza.
      Problemi a tempo finale fisso: condizione necessaria e condizione sufficiente per il problema di Bolza; problemi autonomi. Problemi a tempo finale libero: nozione di tempo di uscita, condizione necessaria per il problema di Bolza; problemi autonomi. *The moon landing problem (risolto parzialmente: esiste di al più un istante di commutazione).*
      Problemi a tempo minimo: condizione necessaria. *In barca con Pontryagin.* Un problema a tempo minimo singolare: *the Dubin car.*
      Problemi ad orizzonte infinito: controesempio di Halkin; condizione sufficiente di ottimalità (DIM). Hamiltoniana corrente, moltiplicatore corrente e loro condizioni necessarie (DIM) e sufficienti per problemi scontati. Funzioni di utilità, cenni alle funzioni quasi-concave, ogni funzione concava è quasi-concava (DIM). *Un modello di consumo ottimo con utilità logaritmica.*
   e. Problemi di esistenza e controllabilità
      Esempi di classe di controlli vuota o di classe di controlli non vuota e senza controllo ottimo (controesempio di Bolza). Disuguaglianza di Gronwall (DIM). Teorema di esistenza del controllo ottimo per i problemi di Bolza: il caso con insieme di controllo chiuso e il caso con insieme di controllo compatto.
3. CONTROLLO OTTIMO CON IL METODO DELLA PROGRAMMAZIONE DINAMICA
   a. La funzione valore e le sue proprietà per il problema più semplice di controllo ottimo.
      Definizione della funzione valore. Il principio di ottimalità di Bellman (DIM).
      Le proprietà della funzione valore: la condizione (necessaria) finale sulla funzione valore (DIM), l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi (BHJ) per funzioni valori differenziabili (DIM). L'Hamiltoniana della Programmazione Dinamica. Condizioni sufficienti di ottimalità (DIM). L'equazione di BHJ lungo la traiettoria ottima (DIM). Sui problemi di minimo.
      Soluzione del problema di strategia aziendale di produzione/vendita.
      La funzione valore del problema a tempo finale fisso e traiettoria al tempo finale libera (sotto opportune ipotesi), è Lipschitz (DIM per problemi autonomi). Cenni al teorema di Rademacher: la funzione valore ammette derivate q.o.
      Definizione di soluzione viscosa per il sistema di BHJ; in caso di regolarità, la nozione "classica" di soluzione e la nozione di soluzione viscosa per il sistema di BHJ sono equivalenti (DIM). La funzione valore del problema a tempo finale fisso e traiettoria al tempo finale libera (sotto opportune ipotesi), è soluzione viscosa per il sistema di BHJ (DIM) ed è unica. Un esempio soluzione viscosa per il sistema di BHJ.
   b. Problemi più generali di controllo ottimo.
      Condizioni necessarie e sufficienti per problemi di controllo ottimo più generali. *Modello di produzione e gestione del magazzino.*

Problemi autonomi, ad orizzonte illimitato, scontati: la sua funzione valore corrente e la relativa equazione di BHJ (DIM). *Un modello di consumo ottimo con utilità HARA. Cenni al modello stocastico di Merton.*

c. Legami tra i metodi variazionali e la Programmazione Dinamica.

Interpretazione del moltiplicatore come prezzo ombra (DIM).

4. GIOCHI DIFFERENZIALI

a. Nozioni introduttive

Concetti di soluzioni nella teoria dei giochi: equilibrio di Nash, equilibrio di Stackelberg. Formulazione di un gioco differenziale a 2 giocatori. Giochi a somma zero. Strategie a ciclo aperto e feedback.

b. Equilibri di Nash per giochi generici

*Strategie open loop. Uso dell'approccio variazionale: condizioni necessarie e sufficienti per un equilibrio di Nash open-loop. *Il modello lavoratori-capitalisti di Lancaster.*

**Strategie feedback. Perché la tecnica variazione non è particolarmente utile (DIM).

c. Equilibri di Nash per giochi a somma zero

Equilibrio di Nash come punto di sella.

APPROCCIO VARIAZIONALE. Condizioni necessarie e sufficienti con approccio variazionale con strategia open-loop. Open-loop representation di una strategia feedback. Condizioni necessarie con approccio variazionale per la open-loop representation di una strategia feedback. *War of attrition and attack.*

APPROCCIO CON LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA VARIAZIONALE. Insieme dei controlli e insieme delle strategia non anticipative: esempio della strategia non anticipativa costante. Definizione di funzione valore inferiore V^- (superiore V^+): $V^+ \geq V^-$ (DIM "intuitiva"); un esempio di gioco con $V^+ > V^-$. Definizione di funzione valore V. Hamiltoniana inferiore della Programmazione Dinamica H^-_{PD} (superiore H^+_{PD}): $H_{PD} \leq H^+_{PD}$ (DIM); un esempio di gioco con $H_{PD} < H^+_{PD}$. Condizione di Isaacs (o di minimax) e definizione di Hamiltoniana della Programmazione Dinamica H_{PD}.

*RISULTATI CON SOLUZIONI VISCOSE. V^- (V^+) è Lipschitz (sotto opportune ipotesi). V^- (V^+) è l'unica soluzione viscosa dell'equazione di Isaacs inferiore (superiore). La condizione di Isaacs implica che il problema ammette valore V ed è l'unica soluzione viscosa dell'equazione di Isaacs.

**RISULTATI CON SOLUZIONI REGOLARI. Condizione sufficiente per un equilibrio di Nash nelle strategie feedback, con l'ipotesi della condizione di Isaacs e di soluzione regolare dell'equazione di Isaacs. Una dimostrazione geometrica che, con l'ipotesi della condizione di Isaacs, V soddisfa l'equazione di Isaacs (DIM).

d. Giochi di cattura ed evasione

Formulazione di un gioco di cattura-evasione, target set, exit time. Proprietà dei giochi di cattura-evasione: le funzioni valore non dipendono dal tempo, game set, forma delle equazioni di Isaacs (DIM). Condizione sufficiente per un equilibrio di Nash nelle strategie feedback. *Lady in the lake.*

e. Giochi cattura-evazione di tipo

Formulazione di un gioco di cattura-evasione di tipo. Classificazione degli stati: stato di cattura C_{ap}, stato di fuga E_{sc}. $V^- = V^+ = -1$ in C_{ap}; $V^- = V^+ = 1$ in E_{sc} (DIM).

Usable part, barriera, bordo dell'usable part e superficie semipermeabile. La barriera è una superficie semipermeabile (DIM). Definizione di controllo di barriera. Costruzione della barriera (DIM).

Interception of a straight flying evader.

Materiale didattico del corso

[C1] A. Calogero *"Notes on optimal control theory"*, disponibile gratuitamente in rete.
[C2] A. Calogero *"A very short tour on differential games"*, disponibile gratuitamente in rete.
[C3] A. Calogero "*Exercises of dynamic optimization*", disponibile gratuitamente in rete.

Ulteriore materiale didattico:

[BO] T. Başar, G.O. Olsder "*Dynamic noncooperative game theory*", SIAM Classic in Applied Mathematics, 1998
[B] A. Bressan "*Noncooperative differential games. A Tutorial*", Milan Journal of Nathematics, vol 79, pag 357-427, 2011.
[E] L.C. Evans "*An introduction to mathematical optimal control theory*", disponibile gratuitamente in rete.
[FR] W.H. Fleming, R.W. Rishel "*Deterministic and stochastic optimal control*", Springer-Verlag, 1975
[KS] M.I. Kamien, N.L. Schwartz "*Dynamic optimization*" Elsevier, second edition, 2006
[SS] A. Seierstad, K Sydsæter "*Optimal control theory with economics applications*" Elsevier Science, 1987

Modalità di esame

L'esame consiste in una prova scritta e un prova orale facoltativa (senza orale non si registrano voti superiori ai 27/30); l'ammissione alla prova orale è a discrezione del docente.

L'ESAME SCRITTO (3 ore) consiste in una prova sui seguenti argomenti:

definizioni, teoremi, dimostrazioni (le dimostrazioni sono indicate con DIM) come da programma;
modelli Economici come da programma;
esercizi di controllo ottimo con metodo variazionale e con la programmazione dinamica.
Gli esercizi dell'esame scritto verranno scelti rigorosamente dalla lista [C3] presente sulla pagina del corso (escludendo gli esercizi del punto 1.8): si consiglia di verificare periodicamente la lista.

L'ESAME ORALE è un approfondimento dell'elaborato scritto in data da concordarsi con il docente.