Matematica

4. Funzioni potenza, equazioni e disequazioni irrazionali

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2020-21

[1]Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

1. Funzioni potenza
   - Richiami sulle potenze
   - Definizione di funzione potenza
   - Funzioni potenza con esponente intero positivo
   - Funzioni potenza con esponente frazionario positivo
2. Equazioni irrazionali
   - Definizione di equazione irrazionale
   - Equazioni irrazionali con radice di indice pari
   - Equazioni irrazionali con radice di indice dispari
   - Equazioni irrazionali con più radici
3. Disequazioni irrazionali
   - Disequazioni irrazionali con radice ad indice pari
   - Disequazioni irrazionali con radice ad indice dispari

Richiami sulle potenze

- Se a è un numero reale e m un naturale maggiore o uguale a 2, si definisce **potenza di base** a ed **esponente** m il numero:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m-\text{volte}}$$

  - Se $m = 1$ si pone per definizione: $a^1 = a$.
  - Se $m = 0$ e $a \neq 0$ si pone per definizione: $a^0 = 1$.
  - 0^0 è invece indefinito.
- La definizione di potenza si estende per consentire:
  - **esponenti interi negativi** con base diversa da zero:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \qquad a \neq 0$$

  - **esponenti frazionari**, cioè del tipo m/n, con n numero naturale maggiore di 1:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a > 0; \qquad 0^{\frac{m}{n}} = 0, \qquad \frac{m}{n} > 0$$

Proprietà delle potenze

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a\,b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Funzioni potenza

- Si chiamano **funzioni potenza** le funzioni del tipo:

$$f(x) = x^n$$

  - se $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ (esponente intero e positivo), il dominio è $\mathbb{R}$.
  - se $n \in \mathbb{Z}$ e $n < 0$, il dominio è $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.
  - negli altri casi, il dominio è $\mathbb{R}^+$.
- Qualunque sia l'esponente n, il grafico della funzione x^n passa sempre per il punto (1,1).

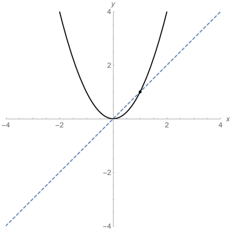
Funzioni potenza con esponente intero positivo

- I grafici delle **funzioni potenza con esponente intero e positivo**:

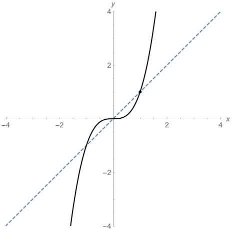
$$f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

  sono qualitativamente di due tipi diversi:
  - quando n è pari, le funzioni sono **funzioni pari** (con diagramma simmetrico rispetto all'asse delle ordinate);
  - quando n è dispari, le funzioni sono **funzioni dispari** (con diagramma simmetrico rispetto all'origine degli assi).
- Elementi utili per visualizzare l'andamento delle funzioni:
  - Tutti i grafici passano per il punto (1,1).
  - Nell'intervallo $x \in (0,1)$, il grafico passa al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n, si discosta sempre più da essa.
  - Nell'intervallo $x \in (1,+\infty)$, il grafico passa al di sopra della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n, si discosta sempre più da essa.

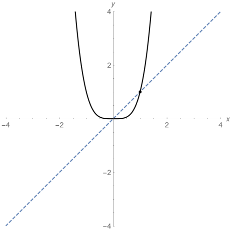
Esempi di funzioni potenza con esponente intero positivo



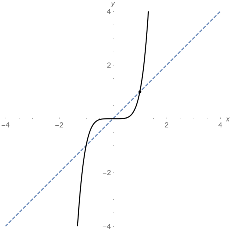
(a) $f(x) = x^2$



(b) $f(x) = x^3$



(c) $f(x) = x^4$



(d) $f(x) = x^5$

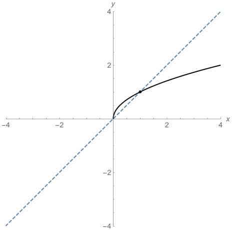
Funzioni potenza con esponente frazionario positivo

- Le **funzioni potenza con esponente frazionario positivo** sono del tipo:

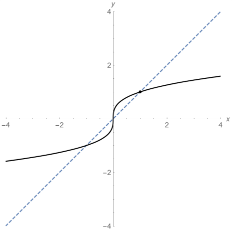
$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \qquad m, n \in \mathbb{N}^+$$

- Per semplicità ci limitiamo a due casi:
  - $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, che:
    - è definita nei reali solo per $x \geq 0$;
    - è sempre positiva ad eccezione di $f(0) = 0$.
  - $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$
    - è definita $\forall x \in \mathbb{R}$;
    - è negativa (positiva) se x è positivo (negativo).
- Elementi utili per visualizzare l'andamento delle funzioni:
  - Tutti i grafici passano per il punto (1,1).
  - Nell'intervallo $x \in (0, 1)$, il grafico passa al di sopra della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n, si discosta sempre più da essa.
  - Nell'intervallo $x \in (1, +\infty)$, il grafico passa al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n, si discosta sempre più da essa.

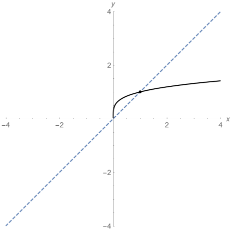
Esempi di funzioni potenza con esponente frazionario



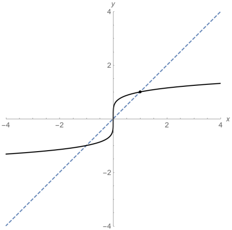
(a) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$



(b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$



(c) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$



(d) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$

Equazioni irrazionali

- Le **equazioni irrazionali** sono equazioni individuate da operazioni tra polinomi in cui almeno uno di essi, non costante, è elevato a una potenza con esponente fratto.
- In pratica, nelle equazioni irrazionali l'incognita x compare sotto radice.
- La forma normale di un'equazione irrazionale è del tipo:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

  dove $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi.
- È necessario distinguere equazioni irrazionali:
  - con radice di indice pari (n è pari);
  - con radice di indice dispari (n è dispari);
  - con più radici che hanno:
    - lo stesso indice;
    - indice diverso.

Equazioni irrazionali con radice di indice pari

- Forma normale di un'equazione irrazionale:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

  dove $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi e n è un **numero pari**.
- Per risolverla occorre:
  - Imporre la **condizione di esistenza**: $f(x) \geq 0$.
  - Imporre la **condizione di concordanza dei segni**: $g(x) \geq 0$
  - Elevare entrambi i membri dell'equazione all'esponente n e risolvere l'equazione: $f(x) = [g(x)]^n$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$$

Equazioni irrazionali con radice di indice dispari

- Forma normale di un'equazione irrazionale:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

  dove $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi e n è un **numero dispari**.
- Poiché le potenze con esponente dispari preservano il segno, per risolverla occorre semplicemente elevare entrambi i membri dell'equazione all'esponente n e risolvere l'equazione:

$$f(x) = [g(x)]^n$$

Equazioni irrazionali con più radici

In presenza di un'**equazione irrazionale con più radici** occorre:

- imporre le **condizioni di esistenza**, una per ogni radice con indice pari;
- cercare di isolare le radici in modo che si trovino a destra e a sinistra del segno di uguaglianza, del tipo:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$$

- se uno o più indici sono pari imporre le **condizioni di concordanza dei segni**.
- elevare i due membri al **minimo comune multiplo degli indici delle radici**.

Disequazioni irrazionali con radice ad indice pari

- Forma normale di una disequazione irrazionale:

$$\sqrt[n]{f(x)} \lesseqgtr g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi e n è un **numero pari**.

- Possibili quattro casi:

1. **Disequazioni con verso maggiore**: $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

2. **Disequazioni con verso maggiore o uguale**: $\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^n \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Disequazioni irrazionali con radice ad indice pari

3. **Disequazioni con verso minore**: $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases}$$

4. **Disequazioni con verso minore o uguale**: $\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^n \end{cases}$$

Disequazioni irrazionali con radice ad indice dispari

- Forma normale di una disequazione irrazionale:

$$\sqrt[n]{f(x)} \lesseqgtr g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi e n è un **numero dispari**.

- Poiché le potenze con esponente dispari preservano il segno, per risolverla occorre semplicemente elevare entrambi i membri della disequazione all'esponente n e risolvere la disequazione:

$$f(x) \lesseqgtr [g(x)]^n$$