ESERCITAZIONE IV

ESERCIZIO 1 Disegnare le seguenti iperboli equilatere:

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{-x+4}{2x+3}$

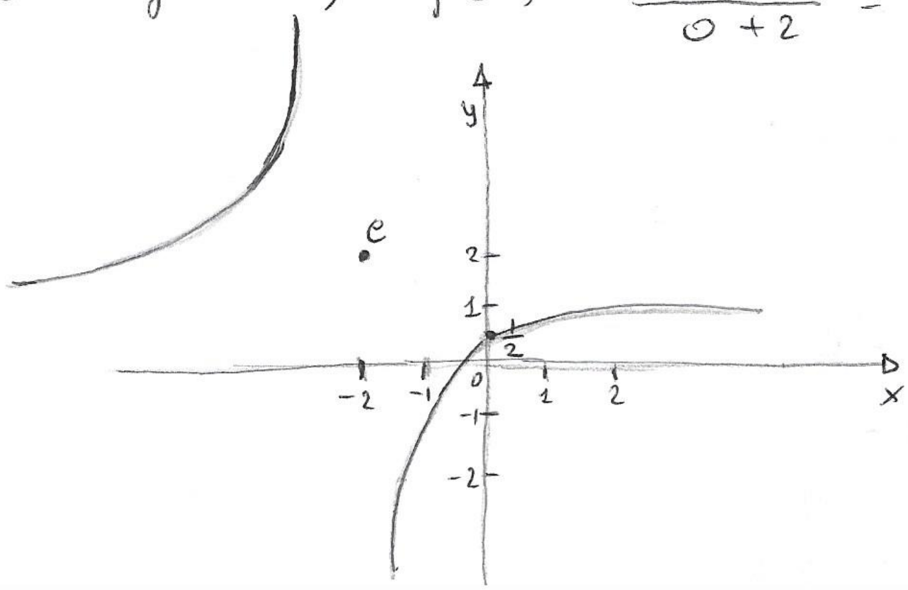
a) Ricordiamo che per disegnare l'iperbole equilatera generata da una particolare funzione omografica del tipo $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc \neq 0$

dobbiamo determinare:

- le coordinate del centro di simmetria dell'iperbole
$$C = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$
- il punto di intersezione con l'asse delle ordinate $(x=0)$, cioè $f(x=0) = f(0)$

Nel nostro caso $C = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right) = \left(-\frac{2}{1}, \frac{2}{1}\right) = (-2, 2)$

e il punto di intersezione con l'asse delle ordinate sarà $f(x=0) = f(0) = \dfrac{2 \cdot 0 + 1}{0+2} = \dfrac{0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$



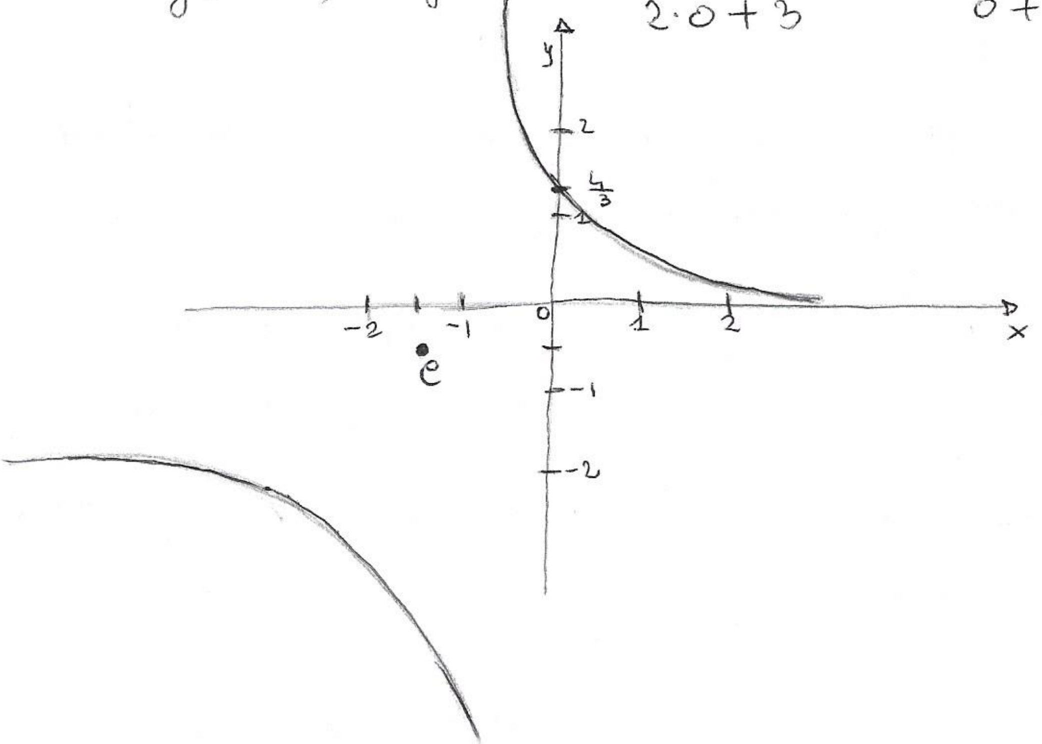
b) $f(x) = \dfrac{-x+4}{2x+3}$

L'iperbole equilatera avrà centro nel punto:

$$C = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Il punto di intersezione con l'asse delle ordinate sarà:

$$f(x=0) = f(0) = \frac{-0+4}{2\cdot 0+3} = \frac{-0+4}{0+3} = \frac{4}{3}$$



ESERCIZIO 2 Risolvere la seguente disequazione

$$(x^2-1)(x^2+4x+4) \geq 0$$

La disequazione può essere scomposta in fattori, dunque posso utilizzare la regola dei segni per risolverla

$$(x^2-1)(x^2+4x+4) \geq 0$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)^2 \geq 0$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x+2) \geq 0$$

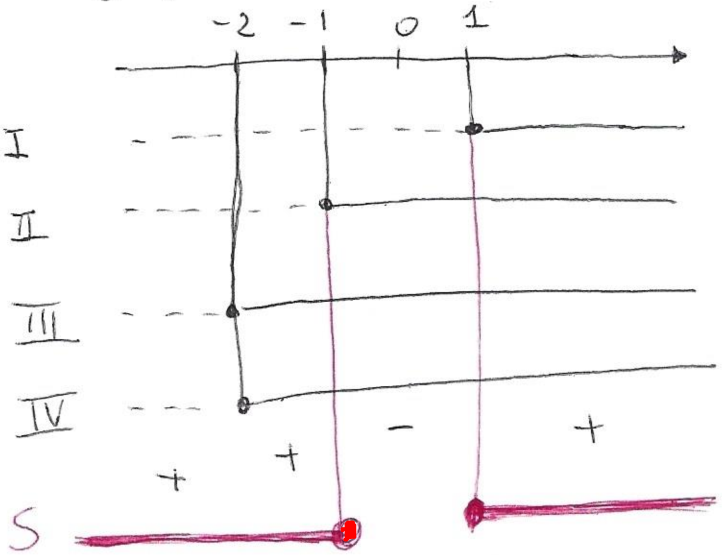
I) $x-1 \geq 0$ $\quad x \geq 1$

II) $x+1 \geq 0$ $\quad x \geq -1$

III) $x+2 \geq 0$ $\quad x \geq -2$

IV $x+2 \geq 0$ $\quad x \geq -2$

Il grafico è:



S: $x \leq -1 \vee x \geq 1$

S: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

ESERCIZIO 3 Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni frazionarie:

a) $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x+1} = 0$

b) $\frac{x+1}{3(x-1)} - \frac{1+2x}{x+1} \geq \frac{3x-5x^2+6}{3(x-1)(x+1)}$

a) $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x+1} = 0$

CE: 1) $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

2) $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

CE: $\forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \vee x \neq -2$

$$\frac{5(x+1) - 3(x+2)}{(x+2)(x+1)} = 0$$

$$\frac{5x+5-3x-6}{(x+2)(x+1)} = 0$$

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x+1)} = 0$$

$$\frac{(2x-1)\cancel{(x+2)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x+1)}} = 0\cdot(x+2)(x+1)$$

$$2x-1=0$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

La soluzione $x=\frac{1}{2}$ soddisfa la condizione di esistenza, dunque è la soluzione della equazione frazionaria (a)

b) $$\frac{x+1}{3(x-1)} - \frac{1+2x}{x+1} \geq \frac{3x-5x^2+6}{3(x-1)(x+1)}$$

CE: 1) $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

2) $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

CE: $\forall x \in \mathbb{R}$ tc $x \neq \pm 1$

$$\frac{(x+1)(x+1) - (1+2x)3(x-1)}{3(x-1)(x+1)} \geq \frac{3x-5x^2+6}{3(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{(x+1)(x+1) - 3(1+2x)(x-1) - 3x + 5x^2 - 6}{3(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2+2x+1 - 3(x-1+2x^2-2x) - 3x + 5x^2 - 6}{3(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{\cancel{x^2}+2x+1-3\cancel{x}+3-\cancel{6x^2}+6\cancel{x}-3\cancel{x}+\cancel{5x^2}-6}{3(x-1)(x+1)}\geq 0$$

$$\frac{2x-2}{3(x-1)(x+1)}\geq 0$$

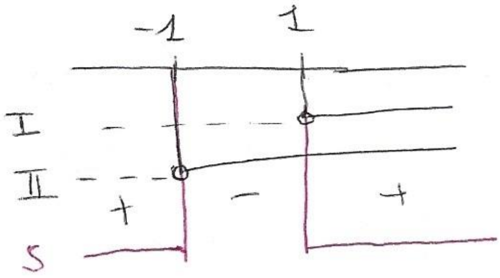
N: $2x-2\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 2 \Rightarrow x\geq \frac{2}{2}$ $\quad x\geq 1$

D: $3(x-1)(x+1)>0$

I $\quad x-1>0 \Rightarrow x>1$

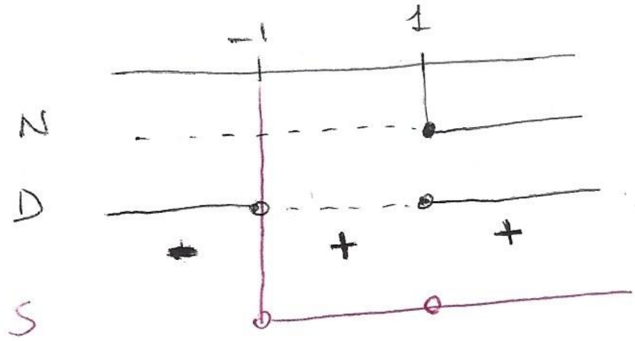
II $\quad x+1>0 \Rightarrow x>-1$

Grafico del denominatore:



S: $x<-1 \quad \vee \quad x>1$

Grafico della disequazione frazionaria



S: $-1<x<1 \quad \vee \quad x>1$

S: $(-1,1)\cup(1,+\infty)$ compatibile con la condizione di esistenza $\forall x\in\mathbb{R}: x\neq\pm 1$

ESERCIZIO 4 Rappresentare i grafici delle seguenti funzioni potenza, evidenziando il dominio e l'insieme delle immagini:

a) $y = x^6$

b) $y = x^7$

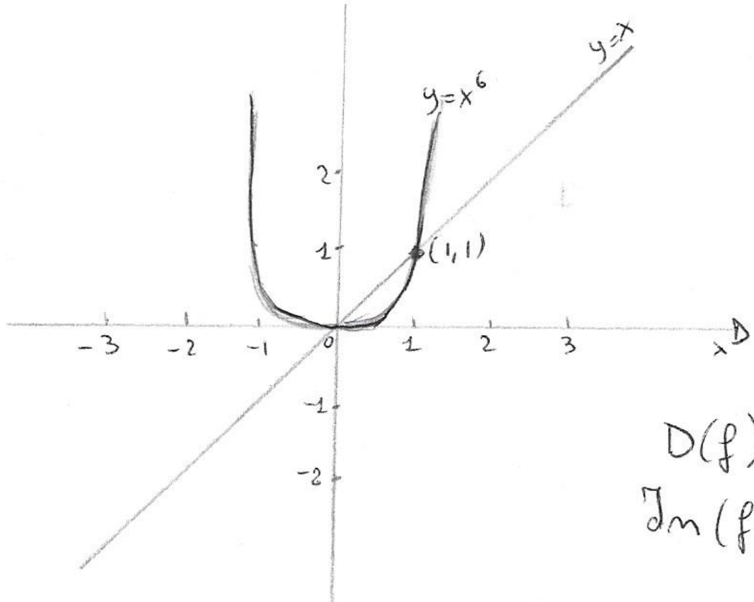
c) $y = x^{\frac{1}{4}}$

d) $y = x^{\frac{1}{5}}$

a) $y = x^6$

(1) Ricordiamo che il grafico della funzione potenza $f(x) = x^n$ passa sempre per il punto $(1,1)$, inoltre, (2) se n è pari le funzioni sono funzioni pari (con diagramma simmetrico rispetto all'asse delle ordinate). (3) Nell'intervallo $x \in (0,1)$ il grafico passa al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n, si discosta sempre più da essa.

(4) Nell'intervallo $x \in (1, +\infty)$, il grafico passa al di sopra della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n, si discosta sempre più da essa.

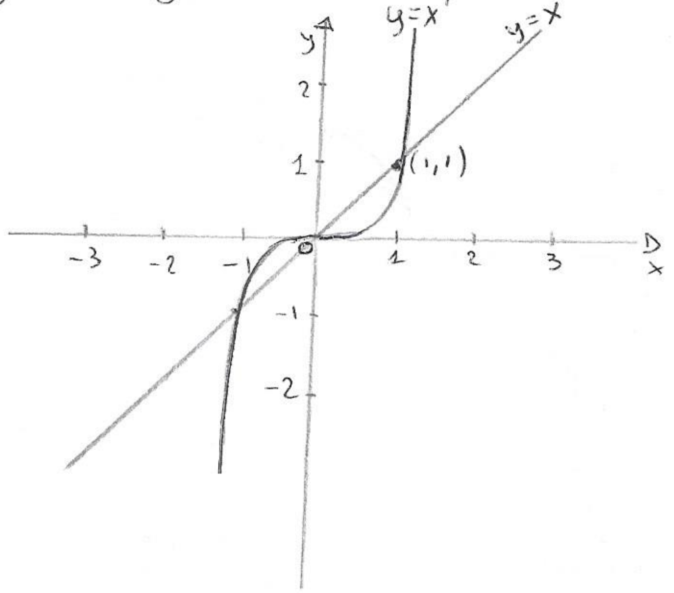


$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [0, +\infty)$

b) $y = x^7$

Ricordiamo che valgono le (1), (3), (4) del caso a), inoltre
Per n dispari la funzione è dispari (con diagramma simmetrico rispetto all'origine degli assi



$D(f) = \mathbb{R}$
$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

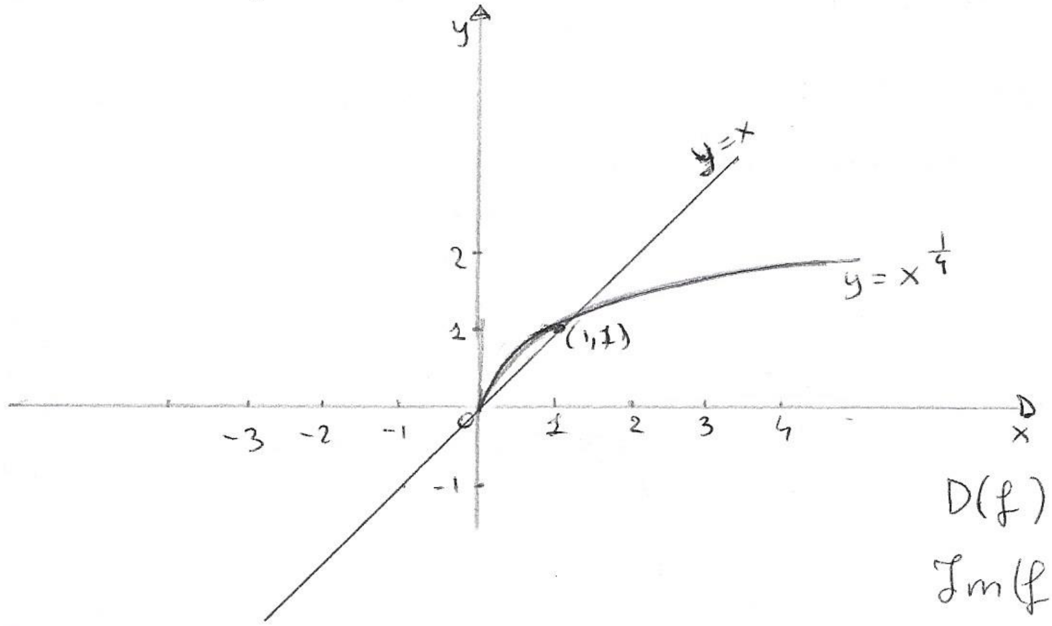
c) $y = x^{\frac{1}{4}}$

Ricordiamo alcuni elementi utili per visualizzare l'andamento delle funzioni potenza con esponente frazionario positivo

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} \qquad m, n \in \mathbb{N}^+$$

1) Tutti i grafici passano per il punto $(1,1)$
2) Nell'intervallo $x \in (0,1)$, il grafico passa al di sopra della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n, si discosta sempre più da essa
3) Nell'intervallo $x \in (1, +\infty)$, il grafico passa al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante e, all'aumentare di n, si discosta sempre più da essa.

Nel caso $y = x^{\frac{1}{4}}$ valgono 1), 2) e 3), si ha inoltre che essendo il denominatore dell'esponente pari la funzione esiste solo per $x \geq 0$ ed è sempre positiva ad eccezione di $f(0) = 0$ -

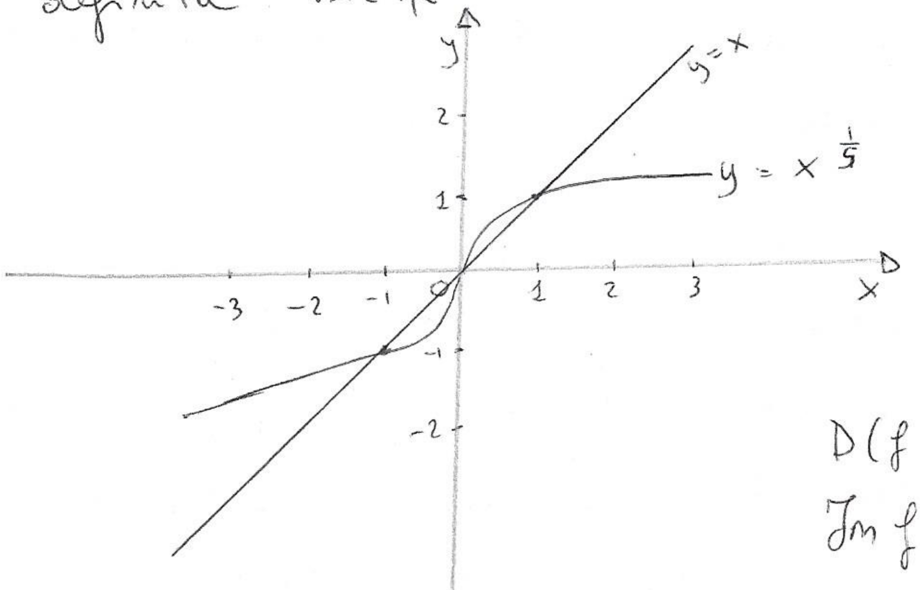


$D(f) = [0, +\infty)$

$Im(f) = [0, +\infty)$

d) $y = x^{\frac{1}{5}}$

Anche per $y = x^{\frac{1}{5}}$ valgono le 1), 2) e 3) inoltre la funzione $y = x^{\frac{1}{5}}$ ~~ha~~ denominatore dell'esponente dispari quindi è definita $\forall x \in \mathbb{R}$



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im\, f = \mathbb{R}$

ESERCIZIO 5 Risolvere le seguenti equazioni

a) $\sqrt{x-3} = 5-x$

b) $\sqrt[3]{x^3-5x-4} = x-1$

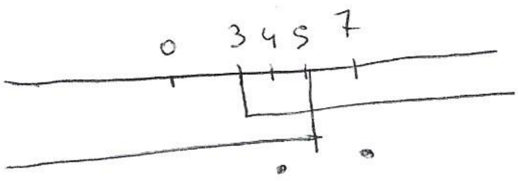
c) $\sqrt[4]{3x^2-2x+25} = \sqrt{3-2x}$

a) $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x-3 = (5-x)^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 3 \\ -x \geq -5 \\ x-3 = 25+x^2-10x \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \\ -x^2+11x-28=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \\ x^2-11x+28=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{+11 \pm \sqrt{121-112}}{2} = \end{cases}$ $\dfrac{11-3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$; $\dfrac{11+3}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$

$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \\ x_1 = 4 \quad x_2 = 7 \end{cases}$



L'unica soluzione accettabile è $x=4$

b) $\sqrt[3]{x^3-5x-4} = x-1$

$x^3-5x-4 = (x-1)^3$

$x^3-5x-4 = x^3-3x^2+3x-1$

$\cancel{x^3}-5x-4-\cancel{x^3}+3x^2-3x+1=0$

$3x^2-8x-3=0$

$$x_{1,2}=\frac{+8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\begin{cases}\frac{8-10}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}\\[4pt] \frac{8+10}{6}=\frac{18}{6}=3\end{cases}$$

$x_1=-\frac{1}{3}\qquad x_2=3$

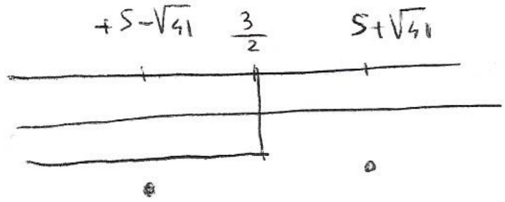
e) $\sqrt[4]{3x^2-2x+25}=\sqrt{3-2x}$

$$\begin{cases}3x^2-2x+25\geq 0\\ 3-2x\geq 0\\ 3x^2-2x+25=(3-2x)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=4-300<0\\ -2x\geq -3\\ 3x^2-2x+25=9-12x+4x^2\end{cases}\qquad\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ x\leq\frac{3}{2}\\ -x^2+10x+16=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ x\leq\frac{3}{2}\\ x^2-10x-16=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ x\leq\frac{3}{2}\\ x_{1,2}=\frac{+10\pm\sqrt{100+64}}{2}=\begin{cases}\frac{10-2\sqrt{41}}{2}\\[4pt] \frac{10+2\sqrt{41}}{2}\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ x\leq\frac{3}{2}\\ x_1=5-\sqrt{41}\qquad x_2=5+\sqrt{41}\end{cases}$$



$x=5-\sqrt{41}$ unica soluzione accettabile

ESERCIZIO 6 Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

a) $\sqrt{6x+1} \geq 3-2x$

b) $\sqrt{x+1} \leq 5-x$

c) $\sqrt[3]{8+x^3} > x-4$

Ricordiamo che $\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$ con n pari si risolve

a)
$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^n \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Nel nostro caso $\sqrt{6x+1} \geq 3-2x$ e' equivalente a

$$\begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 6x+1 \geq (3-2x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 3-2x < 0 \\ 6x+1 \geq 0 \end{cases}$$

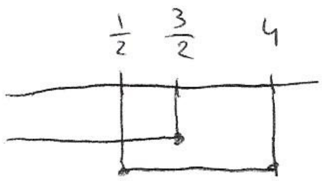
$$\begin{cases} -2x \geq -3 \\ 6x+1 \geq 9-12x+4x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} -2x < -3 \\ 6x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \leq 3 \\ 6x+1-9+12x-4x^2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x > 3 \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

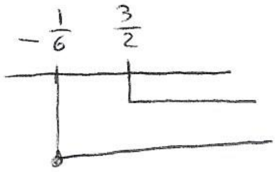
$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ -4x^2+18x-8 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 4x^2-18x+8 \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{cases}$$



$\cup$



$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \qquad\qquad x > \frac{3}{2}$$

$$S: \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \ \cup \ x > \frac{3}{2}$$

$$S: \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

b) Ricordiamo che $\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$ con n pari si risolve

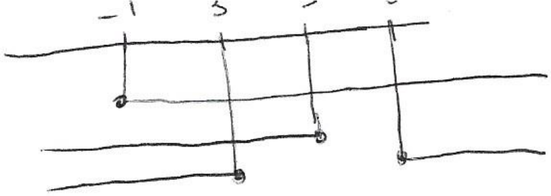
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^n \end{cases}$$

Nel nostro caso $\sqrt{x+1} \leq 5-x$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x+1 \leq (5-x)^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ -x \geq -5 \\ x+1 \leq 25-10x+x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \\ x+1-25+10x-x^2 \leq 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \\ -x^2+11x-24 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \\ x^2-11x+24 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \\ x \leq 3 \ \cup \ x \geq 8 \end{cases}$$



$-1 \leq x \leq 3$

$S: [-1, 3]$

c) Ricordiamo che $\sqrt[n]{f(x)} \lesseqgtr g(x)$ con n dispari

si risolve attraverso la disequazione

$$f(x) \lesseqgtr [g(x)]^n$$

Nel nostro caso

$$\sqrt[3]{8+x^3} > x-4$$

$$8+x^3 > (x-4)^3$$

$$8+x^3 > x^3+3x^2(-4)+3x(-4)^2+(-4)^3$$

$$8+x^3 > x^3-12x^2+48x-64$$

$$8+\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+12x^2-48x+64>0$$

$$12x^2-48x+72>0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 2304-3456 = -1152<0$$

$S: \ \forall x \in \mathbb{R}$

$S: (-\infty, +\infty)$