Note di matematica finanziaria
Capitalizzazione semplice, composta e continua

Giuseppe Vittucci Marzetti*

28 ottobre 2018

Supponiamo di prestare nel periodo 0 un *capitale* di valore C_0 (*principal sum*) (es. 1000 euro) al *tasso di interesse* annuo r (es. 10% annuo, ovvero $r = 0,1$). Assumiamo altresì che gli interessi ci siano corrisposti una volta l'anno alla fine del periodo di riferimento (interessi posticipati).

Dopo un anno (all'inizio del periodo 1) si avrà:

$$C_1 = C_0 + rC_0 = (1 + r)C_0.$$

Nel nostro esempio, 1000 euro al tasso di interesse annuo del 10% dopo un anno sono diventati 1100 euro.

Capitalizzazione semplice In regime cosiddetto di *capitalizzazione semplice* (*simple interest*), in cui è solo il capitale iniziale a fruttare interessi, dopo t anni si avrà:

$$C_t = C_0 + t\,rC_0 = (1 + r\,t)C_0.$$

Nel nostro esempio, prestati ad un tasso di interesse annuo costante del 10%, con interesse semplice, dopo 20 anni i nostri 1000 euro saranno diventati 3000 euro ($1000 \times (1 + 20 \times 0,1)$).

Capitalizzazione composta In regime di *capitalizzazione composta* (*compound interest*), in cui gli interessi maturati vengono via via aggiunti al capitale e fruttano anche loro interessi, dopo t anni si avrà:

$$C_t = (1 + r)C_{t-1} = (1 + r)^2 C_{t-2} = \ldots = (1 + r)^t C_0.$$

Nel nostro esempio, prestati a un tasso di interesse annuo costante del 10%, con interesse composto dopo 20 anni i nostri 1000 euro saranno diventati circa 6727,5 euro ($1000 \times 1,1^{20}$).

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126 Milano, Tel.: +39 02 64487457, Fax: +39 02 64487561. Email: giuseppe.vittucci@unimib.it

Capitalizzazione frazionata Se l'interesse annuo r è pagato semestralmente in due tranche (ognuna della metà del valore) e imputato a capitale si ha:

$$C_t = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t} C_0$$

In generale, supponendo che l'interesse annuale r venga corrisposto in m frazioni costanti durante il corso dell'anno e subito imputato a capitale si ha:

$$C_t = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} C_0$$

Questa è la cosiddetta *capitalizzazione frazionata*.

Capitalizzazione continua Quando la frequenza m tende ad infinito (la capitalizzazione degli interessi avviene istante per istante, in modo continuo), si ha il caso di *capitalizzazione continua*:

$$C_t = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} C_0$$

In questo caso, ricordando che uno dei *limiti notevoli* è:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}$$

dove e è il *numero di Eulero* $(2,7183\ldots)$, si ha:

$$C_t = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} C_0 = \left(\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^{rt} C_0 = \mathrm{e}^{rt} C_0$$