Matematica

6. Funzioni, equazioni e disequazioni con valore assoluto

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2020-21

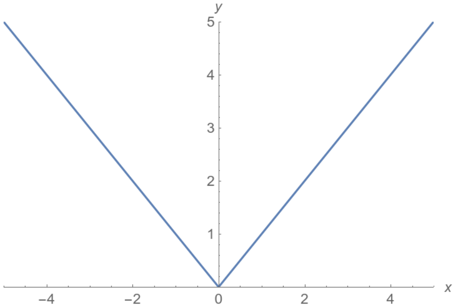
[1]Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

Valore assoluto

- Il **valore assoluto** (o **modulo**) di un numero reale x è una funzione che associa a x il numero stesso se x è maggiore o uguale a zero, e il suo opposto se x è negativo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{con } x \geq 0 \\ -x & \text{con } x < 0 \end{cases}$$



Equazioni con valore assoluto

- Le **equazioni con valore assoluto** (o **equazioni con modulo**) sono equazioni in cui l'incognita compare all'interno di almeno un valore assoluto.
- Queste equazioni si risolvono studiando il segno degli argomenti dei vari valori assoluti, in modo da eliminarli esplicitando i segni degli argomenti.

Equazioni con un valore assoluto e termine noto costante

- Le **equazioni con un valore assoluto e termine noto costante** hanno la seguente forma normale:

$$|f(x)| = k$$

  dove $f(x)$ è un polinomio a coefficienti reali o una frazione algebrica e k una generica costante reale.
- Con
  - $k < 0$, l'equazione non ammette soluzioni;
  - $k = 0$, l'equazione equivale a:

$$f(x) = 0$$

  - $k > 0$

$$f(x) = -k \qquad \vee \qquad f(x) = k$$

Equazioni con un valore assoluto e termine noto variabile

- Le **equazioni con un modulo e termine noto variabile** hanno forma normale:

  $$|f(x)| = g(x)$$

  dove $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi a coefficienti reali o frazioni algebriche.
- Questo tipo di equazioni equivale all'unione di due sistemi misti:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Equazioni con due valori assoluti

- Le **equazioni con due valori assoluti** che hanno la forma normale:

$$|f(x)| = |g(x)|$$

  dove $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi a coefficienti reali o frazioni algebriche.
- In tal caso non è necessario porre condizioni di concordanza dei segni.
- L'insieme delle soluzioni coincide con l'unione degli insiemi delle soluzioni delle equazioni:

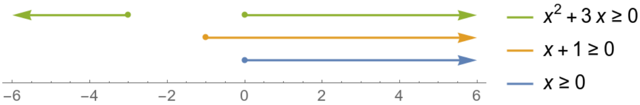
$$f(x) = g(x) \qquad \vee \qquad f(x) = -g(x)$$

Equazioni con due o più valori assoluti

- Il metodo di risoluzione delle **equazioni con due o più valori assoluti** è analogo a quello delle equazioni con un valore assoluto e con termine noto variabile.
- Per risolverle occorre:
    1. studiare il segno degli argomenti di ciascun valore assoluto presente nell'equazione;
    2. disegnare lo schema dei segni ottenuti al punto precedente;
    3. risolvere ogni equazione sul rispettivo intervallo di competenza;
    4. escludere le soluzioni così ottenute che non rientrano nei rispettivi intervalli di competenza;
    5. unire gli insiemi di soluzioni accettabili.

Equazioni con due o più valori assoluti: esempio

$$|x^2+3x|+|x+1|=|x|$$



$$\begin{cases} x\leq -3 \\ x^2+3x-1=0 \end{cases} \cup \begin{cases} -3<x<-1 \\ x^2+3x+1=0 \end{cases} \cup$$

$$\begin{cases} -1\leq x<0 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2+3x+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq -3 \\ x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} -3<x<-1 \\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} -1\leq x<0 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x\geq 0 \\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\left\{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right\} \cup \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\} \cup \emptyset \cup \emptyset$$

Equazioni con un valore assoluto dentro l'altro

- Nelle **equazioni con un valore assoluto incapsulato** occorre applicare i metodi di risoluzione precedenti **dall'esterno all'interno**:
  - Occorre studiare le condizioni relative ai segni degli argomenti più esterni, eliminando così i valori assoluti più esterni.
  - Il procedimento va ripetuto studiando i valori assoluti via via più interni e i relativi sotto-casi.
- Qualche condizione relativa ai segni degli argomenti può tradursi in tal caso in una disequazione con valore assoluto.

Disequazioni con valore assoluto

- Le **disequazioni con valore assoluto** sono disequazioni in cui l'incognita compare all'interno di almeno un valore assoluto.
- Queste disequazioni si risolvono in modo analogo alle equazioni con valore assoluto, studiando il segno degli argomenti dei vari valori assoluti, in modo da eliminarli esplicitando i segni degli argomenti.

Disequazioni con un valore assoluto e termine noto costante

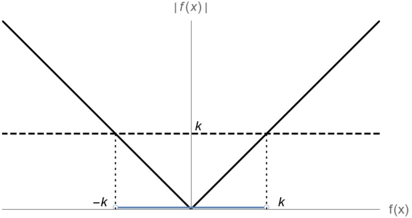
- Le **disequazioni con un valore assoluto e termine noto costante** hanno la seguente forma normale:

$$|f(x)| \gtreqless k$$

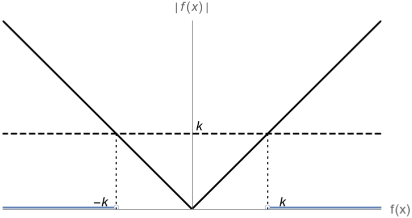
  - $|f(x)| < k$
    - $k \leq 0$, la disequazione non ammette soluzioni;
    - $k > 0$, la disequazione equivale a: $-k < f(x) < k$.
  - $|f(x)| \leq k$
    - $k = 0$, la disequazione equivale a: $f(x) = 0$;
    - $k < 0$, la disequazione non ammette soluzioni;
    - $k > 0$, la disequazione equivale a: $-k \leq f(x) \leq k$.
  - $|f(x)| > k$
    - $k = 0$, la disequazione equivale a: $f(x) \neq 0$;
    - $k < 0$, la disequazione è sempre soddisfatta;
    - $k > 0$, la disequazione equivale a: $f(x) < -k \vee f(x) > k$.
  - $|f(x)| \geq k$
    - $k \leq 0$, la disequazione è sempre soddisfatta;
    - $k > 0$, la disequazione equivale a: $f(x) \leq -k \vee f(x) \geq k$.

Disequazioni con un valore assoluto e termine noto costante positivo

$$|f(x)| \gtrless k \qquad\qquad k > 0$$



(a) $|f(x)| < k$, $-k < f(x) < k$



(b) $|f(x)| > k$, $f(x) < -k \vee f(x) > k$

Disequazioni con un valore assoluto e termine noto variabile

- Le **disequazioni con un valore assoluto e termine noto variabile** hanno la seguente forma normale:

$$|f(x)| \gtreqless g(x)$$

- Questo tipo di disequazioni equivale all'unione di due sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \gtreqless g(x) \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \gtreqless g(x) \end{cases}$$

Disequazioni con due (o più) valori assoluti

- Il metodo di risoluzione delle **disequazioni con due o più valori assoluti** è analogo a quello già visto per le equazioni.
- Per risolverle occorre:
  1. studiare il segno degli argomenti di ciascun valore assoluto;
  2. disegnare lo schema dei segni attraverso cui determinare gli intervalli in cui va studiata la disequazione.
  3. risolvere ogni equazione sul rispettivo intervallo di competenza;
  4. escludere le soluzioni così ottenute che non rientrano nei rispettivi intervalli di competenza;
  5. unire gli insiemi di soluzioni accettabili.

Disuguaglianza triangolare

- Una disuguaglianza notevole che coinvolge i valori assoluti di due variabili è la cosiddetta **disuguaglianza triangolare**:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

- In particolare, quando x e y hanno segni:
  - **discordi**, vale la disuguaglianza in senso stretto;
  - **concordi**, vale l'uguaglianza.