ESERCITAZIONE VI 5-12-2018

ESERCIZIO 1

a) In quanti modi diversi 9 persone possono sedersi in 4 posti?

b) Quanti numeri di 4 cifre diverse si possono fare con le 10 cifre decimali (da 0 a 9)?

c) Calcolare quanti sono i numeri di quattro cifre, tutte tra loro diverse, divisibili per 5.

a) Poiché le persone sono uniche, quindi non possono ripetersi, e l'ordine conta, visto che dobbiamo considerare i modi diversi in cui le persone possono sedersi, si tratta di disposizioni semplici di 9 elementi di classe 4

Il numero $D_{n,k}$ delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k è dato dal seguente prodotto di k numeri interi positivi

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Nel nostro caso:

$$D_{9,4} = 9(9-1)(9-2)(9-4+1) = 9\times 8\times 7\times 6 = 3024$$

Analogamente $D_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 3024$

b) Prima di tutto bisogna tener conto del fatto che i numeri non possono iniziare con 0, dunque al totale dovremo sottrarre tutti i gruppi di cifre che iniziano con 0.

Osserviamo che si tratta di disposizioni poiché i gruppi sono numeri (1234 è diverso da 4321 anche se hanno le stesse cifre), senza ripetizione (il testo dice 4 cifre diverse).

Troviamo quindi le disposizioni semplici di 10 elementi di classe 4

$$D_{10,4} = 10(10-1)(10-2)(10-4+1) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Troviamo ora le disposizioni di 9 elementi di classe 3 (cioè tutti i numeri di 4 cifre in cui la prima è occupata dallo 0, che non si può ripetere e dunque nei restanti 3 posti avremo solo le cifre da 1 a 9)

$$D_{9,3} = 9(9-1)(9-3+1) = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

Dunque la soluzione è

$$N = D_{10,4} - D_{9,3} = 5040 - 504 = 4536$$

c) Si tratta anche in questo caso di disposizioni semplici

Ricordiamo che un numero è divisibile per 5 se l'ultima cifra, quella delle unità è zero oppure 5.
Se l'ultima cifra è zero la prima la posso scegliere in 9 modi diversi, la seconda in 8 e la terza in 7. Dunque i numeri di quattro cifre tra loro diverse che terminano con zero sono:

$$D_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9\times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 504$$

se l'ultima cifra è cinque, allora la prima la posso scegliere in 8 modi diversi (non posso considerare lo zero altrimenti non avrei più un numero di quattro cifre), la seconda in 8 modi diversi e infine la terza in 7.
Dunque i numeri di quattro cifre diverse che terminano con cinque sono

$$D_{8,1} \cdot D_{8,2} = 8 \times 8(8-2+1) = 8\times 8\times 7 = 448$$

Sommando si ottiene il numero desiderato

$$N = D_{9,3} + D_{8,1} \cdot D_{8,2} = 504 + 448 = 952$$

ESERCIZIO 2

a) Calcolare il numero delle permutazioni dei colori dell'arcobaleno.

b) Calcolare quanti numeri di 5 cifre distinti si possono formare con le cifre 1, 3, 5, 7, 9 -

c) Calcolare il numero di possibili anagrammi della parola "numero".

d) Mauro ha 15 libri di Analisi, 15 di Geometria e 6 di Storia della Matematica - Calcolare in quanti modi può allinearli su uno scaffale - calcolare poi in quanti modi può allinearli su uno scaffale in modo che i libri di uno stesso argomento siano vicini -

a) Dobbiamo considerare una permutazione dei 7 colori dell'arcobaleno, ricordiamo infatti che le permutazioni semplici di n oggetti sono gli allineamenti che si possono formare considerando ogni volta tutti gli oggetti dati senza ripetizione

$$P_n = D_{n,n} = n!$$

Nel nostro caso il numero delle permutazioni dei colori dell'arcobaleno è dato da

$$P_7 = D_{7,7} = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

b) Per calcolare il numero dei numeri di 5 cifre distinte che si possono formare con le cifre 1, 3, 5, 7, 9 dobbiamo considerare una permutazione delle 5 cifre

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

c) Poiché la parola "NUMERO" è costituita da lettere tutte distinte tra loro, per calcolare il numero dei possibili anagrammi è sufficiente calcolare il numero di permutazioni delle 6 lettere che costituiscono la parola

$$P_6 = D_{6,6} = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

d) Mauro ha $15+15+6 = 36$ libri che può allineare su uno scaffale in $36!$ modi diversi, cioè

$$P_{36} = 36!$$

Calcoliamo ora in quanti modi può allinearli su uno scaffale in modo che quelli di uno stesso argomento siano vicini.

Sappiamo che i 15 libri di Analisi possono essere ordinati in $15!$ modi diversi, quelli di Geometria in $15!$ modi diversi e quelli di Storia della Matematica in $6!$ modi diversi.

Infine Mauro deve decidere come ordinare i tre gruppi (per esempio, prima Analisi, poi Geometria e infine Storia della Matematica) e

lo può fare in 3! modi diversi.
In totale Mauro può disporre i suoi libri in

$$P_{15} \cdot P_{15} \cdot P_6 \cdot P_3 = 15! \cdot 15! \cdot 6! \cdot 3!$$

modi diversi.

ESERCIZIO 3

a) Calcolare quanti terni si possono (potenzialmente) estrarre da un'urna che contiene i 90 numeri del lotto.

b) In un'azienda vi sono 25 operai e 10 impiegati. Si vuole formare un comitato composto da 2 impiegati e 4 operai. In quanti modi si può formare il comitato?

c) Quante sono le diagonali di un poligono di 5 lati?

d) Quante strette di mano si scambiano 6 persone che partecipano a una riunione di lavoro?

a) I terni non sono altro che configurazioni che si possono formare considerando 3 oggetti distinti tra i 90 dati quindi consideriamo le combinazioni semplici.

Ricordiamo, infatti, che le combinazioni semplici di n oggetti di classe k sono le configurazioni che si possono formare considerando k oggetti distinti

Tra gli n dati, consideramo distinte due configurazioni se differiscono per almeno un oggetto e non per l'ordine.

Il numero $C_{n,k}$ delle combinazioni semplici di n oggetti di classe k è:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

dove $\binom{n}{k}$ indica il coefficiente binomiale.

Nel nostro caso

$$C_{90,3} = \binom{90}{3} = \frac{D_{90,3}}{3!} = \frac{90!}{3!\,(90-3)!} =$$

$$= \frac{90 \times 89 \times \cancel{87!} \times 88}{3!\ \cancel{87!}} = 15 \cdot 89 \cdot 88 = 117\,480$$

b) Per scegliere 4 operai su 25 ci sono $C_{25,4}$ modi

$$C_{25,4} = \binom{25}{4} = \frac{D_{25,4}}{4!} = \frac{25!}{4!\,(25-4)!} =$$

$$= \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times \cancel{21!}}{4!\ \ \cancel{21!}} = \frac{25 \times \cancel{24}^{6} \times 23 \times \cancel{22}^{11}}{\cancel{4} \times 3 \times \cancel{2} \times 1} = \frac{37\,950}{3} =$$

$$= 12\,650$$

Per scegliere 2 impiegati tra 10 ci sono $C_{10,2}$ modi

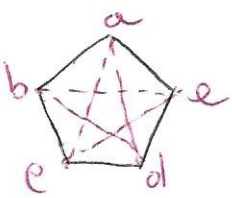
$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{D_{10,2}}{2!} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{2!\,\cancel{8!}} =$$

$$= \frac{\cancel{10}^{\,5} \times 9}{\cancel{2} \times 1} = 5 \times 9 = 45$$

Dunque in Totale ci sono $C_{25,4} \times C_{10,2}$ modi per scegliere un comitato

$$C_{25,4} \times C_{10,2} = 1\,650 \times 45 = 56'250$$

e) Un poligono di 5 lati ha anche 5 vertici, per individuare le diagonali dobbiamo collegare i vertici a due a due senza ripetizioni



$A = \{a, b, c, d, e\}$ = vertici

Dobbiamo poi sottrarre il numero dei lati (collegamento Tra vertici consecutivi)

Dunque avremo che il numero delle diagonali sarà dato da $C_{5,2} - 5$

$$C_{5,2} - 5 = \binom{5}{2} - 5 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} - 5 = \frac{5!}{2!\,3!} - 5 =$$

$$= \frac{5 \times \cancel{4}^{\,2} \times \cancel{3!}}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{3!}} - 5 = \frac{5 \times 2}{1} - 5 = 10 - 5 = 5$$

d) Notiamo che l'ordine non conta poiché se x stringe la mano a y, y non stringerà

la mano a x di nuovo -
Dunque abbiamo le combinazioni di 6 (numero delle persone) elementi considerati a 2 a 2 (numero delle persone coinvolte in ogni stretta di mano)

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{2!\,\cancel{4!}} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times 5}{\cancel{2} \times 1} =$$

$$= 15$$

ESERCIZIO 4

a) Si lancia una moneta 5 volte, quante sono le possibili successioni che si possono avere?

b) In quanti modi si possono presentare le facce di due dadi e quante sono le coppie formate da due numeri dispari?

c) Quante parole di 4 lettere, ripetute o no (anche senza significato) si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto italiano?

d) Determinare il numero di possibili applicazioni da un insieme A composto da 4 elementi, in un insieme B costituito da 5 elementi -

a) Si tratta di una disposizione con ripetizione
Ricordiamo che le disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k sono le configurazioni

che si possono formare considerando K oggetti diversi tra gli n dati

Il numero $D'_{n,K} = n^K$

Nel nostro caso $D'_{2,5} = 2^5 = 32$

b) Le facce del dado sono $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dunque si tratta di una disposizione con ripetizione di 6 elementi di classe 2, cioè $D'_{6,2} = 36$

$$D'_{6,2} = 6^2 = 36$$

Tra queste 36 coppie quelle formate da numeri dispari sono $B = \{1, 3, 5\}$ cioè una disposizione con ripetizione di 3 elementi di classe 2:

$$D'_{3,2} = 3^2 = 9$$

c) Si tratta di una disposizione con ripetizione di 21 elementi di classe 4 quando consideriamo lettere anche ripetute, la disposizione sarà semplice quando consideriamo tutte lettere distinte.

Con ripetizione $D'_{21,4} = 21^4 = 194481$

Senza ripetizione $D_{21,4} = 21 \cdot (21-1)(21-2)(21-4+1) =$

$= 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 143640$

d) Si tratta di una disposizione con ripetizione di 5 elementi di classe 4, quindi

$$D'_{5,4} = 5^4 = 625$$

ESERCIZIO 5

a) Quanti sono gli anagrammi della parola "aritmetica"? E della parola "Topologia"?

b) In quanti modi si possono mettere in fila 6 bambine e 4 bambini distinguendo la posizione di maschi e femmine?

c) Quanti numeri naturali diversi si possono fare con le cifre del numero 775551?

d) Se si hanno 3 palline bianche, 6 rosse e 5 verdi, quante sequenze si possono costruire con le 14 palline?

a) Dato un insieme con n elementi di cui n_1 uguali tra loro, n_2 uguali tra loro e diversi dai precedenti, ..., n_k uguali tra loro e diversi dai precedenti, le permutazioni con ripetizione di questi n oggetti sono gli allineamenti che si possono formare considerando ogni volta tutti gli oggetti dati.

$$P'_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

Nel nostro caso essendo la parola ARITMETICA composta da 10 lettere di cui

2A, 1R, 2I, 2T, 1M, 1E, 1C

il numero degli anagrammi possibili corrisponde alle permutazioni con ripetizione

$$P'_{2,1,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!\,1!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!} =$$

$$= \frac{10!}{2!\,2!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6}^{3} \times 5 \times \cancel{4}^{2} \times 3 \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{2} \times 1} =$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 1}{1} = 453600$$

Nella parola TOPOLOGIA abbiamo 9 lettere di cui 1T, 3O, 1P, 1L, 1G, 1I, 1A

il numero degli anagrammi è

$$P'_{1,3,1,1,1,1,1} = \frac{9!}{1!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} =$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 60480$$

b) Poiché distinguiamo i bambini tra maschi e femmine si tratta di permutazioni con ripetizioni di 10 elementi (6 bambine e 4 bambini) di cui 6 e 4 ripetuti

$$P'_{6,4} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}\,4!} =$$

$$= \frac{\cancel{10}^{5} \times \cancel{9}^{3} \times \cancel{8}^{2} \times 7}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = \frac{7 \times 5 \times 3 \times 2}{1} = 210$$

c) Si tratta di una permutazione con ripetizione di 6 elementi : 775551
dove il 7 compare 2 volte, il 5 compare 3 volte e l'1 compare una volta

$$P'_{2,3,1} = \frac{6!}{2!\,3!\,1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2!\,\cancel{3!}} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4}^{2}}{\cancel{2} \times 1} = 60$$

d) Si tratta di una permutazione con ripetizione di 14 oggetti di cui alcuni uguali: 3 palline bianche, 6 rosse e 5 verdi

$$P'_{3,6,5} = \frac{14!}{3!\,6!\,5!} = \frac{11 \times 14 \times 13 \times 12 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{3!\,\cancel{6!}\,5!} =$$

$$= \frac{11 \times 14 \times 13 \times 12 \times \cancel{10}^{2} \times \cancel{9}^{3} \times \cancel{8}^{4} \times 7}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 11 \times 14 \times 13 \times 12 \times 7 =$$

$$= 168\,168$$

ESERCIZIO 6

a) In quanti modi possiamo distribuire 8 caramelle a 5 bambini, sapendo che possiamo assegnare a qualche bambino più di una caramella?

b) In quanti modi possiamo collocare 6 oggetti uguali in 4 contenitori in modo che nessuno di essi sia vuoto?

a) Ricordiamo che
Le combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k sono le configurazioni che si possono formare considerando k oggetti tra gli n dati, considerando distinte due configurazioni che differiscono per gli oggetti contenuti o per il numero di ripetizioni di ogni oggetto, ma non per l'ordine degli oggetti.
Il numero $C'_{n,k}$ delle combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k è

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Nel nostro caso dobbiamo calcolare le combinazioni con ripetizione di 5 elementi di classe 8

Esercizio 6a Occorre calcolare le combinazioni con ripetizione di 5 elementi (i bambini tra cui suddividere le caramelle) di classe 8 (le 8 caramelle). Per cui la soluzione sarà data da:

$$C'_{5,8} = C_{5+8-1,8} = C_{12,8} = \binom{12}{8} = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495$$

Esercizio 6b Se il problema non richiedesse l'ulteriore condizione che nessuno dei contenitori fosse vuoto, la soluzione sarebbe data dalle combinazioni con ripetizione di 4 elementi di classe 6.

Imponendo invece l'ulteriore condizione che ciascuno dei 4 contenitori contenga almeno un oggetto, la soluzione è data dalle combinazioni con ripetizione di 4 elementi di classe 2 (i 2 oggetti rimanenti dei 6 originari da collocare una volta che in ognuno dei 4 contenitori è stato posizionato un oggetto per soddisfare la condizione):

$$C'_{4,2} = C_{5,2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$