Matematica
Esempio esame – Unità 7

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

Novembre 2018

1. *Esercizio.* Quante sono le password diverse di 5 caratteri che si possono ottenere utilizzando le 26 lettere dell'alfabeto latino e le 10 cifre del sistema numerico decimale

   (a) (2 punti) in un sistema non *case sensitive* (non sensibile alle maiuscole)?

   Soluzione Queste sono pari alle disposizioni con ripetizione di 36 elementi di classe 5:

   $$D'_{36,5} = 36^5 = 60.466.176$$

   (b) (2 punti) in un sistema *case sensitive* (sensibile alle maiuscole)?

   Soluzione Queste sono pari alle disposizioni con ripetizione di 62 ($= 10 + 26 \times 2$) elementi di classe 5:

   $$D'_{62,5} = 62^5 = 916.132.832$$

   (c) (2 punti) in un sistema non *case sensitive* (non sensibile alle maiuscole) e che contengono al loro interno la parola "lisa"?

   Soluzione Essendo di 4 caratteri, la parola "lisa" può apparire solo all'inizio, lasciando libero l'ultimo carattere, o dopo il primo carattere, lasciando libero l'ultimo carattere, per cui il numero di password totali si riduce a:

   $$2 \cdot D'_{36,1} = 2 \cdot 36 = 72$$

2. *Esercizio*: Calcola il numero di possibili anagrammi delle seguenti parole:

   (a) (1 punto) "posteri"

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Soluzione Essendo la parola composta di 7 lettere e non contenendo lettere ripetute, il numero di anagrammi è dato semplicemente dalle permutazioni semplici di 7 oggetti:

$$P_7 = 7! = 5040.$$

(b) (1 punto) "posteriore"

Soluzione Essendo la parola composta da 10 lettere, di cui 3 (o, e, r) sono ripetute due volte, il numero degli anagrammi distinti che è possibile formare è:

$$P'_{2,2,2,1,1,1,1} = \frac{10!}{2!2!2!} = 453.600$$

3. (3 punti) *Esercizio.* Immagina di possedere dischi di 8 gruppi musicali. Per ciascuno di 5 di questi gruppi possiedi 4 album, mentre per i restanti 3 gruppi possiedi 6 album. Calcola in quanti modi puoi disporre i dischi su uno stesso scaffale:

   (a) (2 punti) in un modo qualsiasi.

   Soluzione Essendo in totale $5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 38$ dischi, il numero di ordinamenti possibili è pari alle permutazioni:
   $$P_{38} = 38! \approx 5,23023 \times 10^{44}$$

   (b) (3 punti) in modo che gli album di uno stesso gruppo siano vicini e i gruppi siano ordinati in ordine alfabetico.

   Soluzione Dato l'ordinamento alfabetico dei gruppi, i dischi potranno essere ordinati in
   $$(P_4)^5(P_6)^3 = (4!)^5(6!)^3 \approx 2,97203 \times 10^{15}$$
   modi differenti.

   (c) (3 punti) in modo che gli album di uno stesso gruppo siano vicini.

   Soluzione Essendo 8! i modi in cui è possibile ordinare i gruppi, gli ordinamenti possibili degli album tali che quelli di uno stesso gruppo siano vicini sono:
   $$P_8\,(P_4)^5(P_6)^3 = 8!\,(4!)^5(6!)^3 \approx 1,19832 \times 10^{20}$$

4. (2 punti) *Esercizio.* Calcola il numero di modi in cui è possibile fare 6 canestri lanciando 20 volte la palla (es. 6 canestri nei primi 6 tiri e poi nessuno nei restanti 14; oppure nessun canestro nei primi due tiri, poi 3 canestri consecutivi, un canestro nel decimo tiro, e due canestri negli ultimi due tiri; ecc.).

Soluzione Il numero è dato dalle combinazioni semplici di 20 oggetti di classe 6:

$$C_{20,6} = \binom{20}{6} = 38.760$$

5. *Esercizio.* Dati due insiemi A e B con cardinalità rispettivamente 8 e 10, calcola:
   (a) (3 punti) il numero delle funzioni che è possibile definire aventi A come *insieme di definizione* e B come *codominio.*

   Soluzione Essendo A l'insieme di definizione e B il codominio, ogni elemento di A deve essere associato ad un solo elemento di B.
   Essendo 8 gli elementi in A e 10 quelli in B, il numero di possibili funzioni è dato dalle disposizioni con ripetizione di 10 oggetti di classe 8:

   $$D'_{10,8} = 10^8 = 100.000.000$$

   (b) (3 punti) il numero delle funzioni definite al punto (a) che sono *iniettive.*

   Soluzione Poiché ogni elemento di B in tal caso non può essere associato a più di un elemento in A, occorre considerare le disposizioni semplici di 10 oggetti di classe 8:

   $$D_{10,8} = \frac{10!}{(10-8)!} = 1.814.400$$

   (c) (2 punti) il numero delle funzioni definite al punto (a) che sono *suriettive.*

   Soluzione Essendo il numero di elementi di A inferiore a quello di B non può esistere una funzione suriettiva $A \mapsto B$, cioè tale che ogni elemento di B sia immagine di almeno un elemento di A.

   (d) (2 punti) il numero delle funzioni definite al punto (a) che sono *biunivoche.*

   Soluzione Non esistendo funzioni suriettive, non possono esistere funzioni biunivoche, essendo queste sia iniettive sia suriettive.

6. (3 punti) *Esercizio.* Calcola il numero di soluzioni possibili dell'equazione:

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 50$$

dove n_1, n_2, n_3 e n_4 sono numeri interi positivi (strettamente maggiori di 0).

Soluzione Sappiamo che il numero di soluzioni in interi non negativi dell'equazione sarebbe data dalle combinazioni con ripetizione. Poiché in questo caso le incognite non possono assumere valori nulli, per utilizzare la formula possiamo riesprimere l'equazione come segue:

$$(n'_1 + 1) + (n'_2 + 1) + (n'_3 + 1) + (n'_4 + 1) = 50$$

dove $n'_i = n_i - 1$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) assume valori interi non negativi.

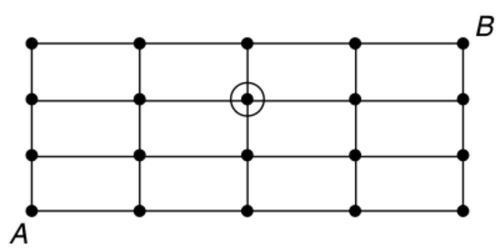
Avendo ora:

$$n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4 = 46$$

il numero di soluzioni è dato dalle combinazioni con ripetizione di 4 oggetti di classe 46:

$$C'_{4,46} = \binom{46 + 4 - 1}{46} = \binom{49}{46} = \frac{49!}{46!(49 - 46)!} = 18.424$$

7. *Problema*: Considera la seguente griglia di punti.



Supponi che, partendo dal punto A, puoi muovere per ciascun passo solo a destra o in alto da un punto ad un altro; e continui a muovere fino a quando non è raggiunto il punto B.

(a) (3 punti) Quanti percorsi differenti da A a B sono possibili?
(*Suggerimento*: Per andare da A a B devi necessariamente fare 4 passi a destra e 3 passi in alto; di fatto, ciascun possibile ordine di 4 passi a destra e 3 passi in alto identifica un percorso differente.)

Soluzione Il numero di differenti percorsi è dato dal numero di combinazioni semplici di 7 oggetti di classe 4 (se si considerano i 4 passi a destra), o, in modo equivalente, di classe 3 (se si considerano i 3 passi in alto); pertanto:

$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = C_{7,3} = \binom{7}{3} = 35$$

(b) (3 punti) Qual è il numero di percorsi da A a B che passano per il punto cerchiato in figura?

Soluzione Dato che il numero di percorsi da A al punto cerchiato è dato da $C_{4,2}$, per ragione analoga a quanto discusso al punto (a), e quello dei percorsi da questo punto al punto B è pari a $C_{3,1}$, per il principio del prodotto il numero di percorsi totali è pari a:

$$C_{4,2} \cdot C_{3,1} = \binom{4}{2}\binom{3}{1} = 6 \times 3 = 18$$

(c) (2 punti) Assumendo che ciascun percorso da A a B sia equiprobabile, qual è la probabilità che un percorso da A a B passi per il punto cerchiato?

Soluzione La probabilità in questo caso è data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli, calcolato al punto (b) e quello dei casi possibili, calcolato al punto (a):

$$\mathrm{Pr} = \frac{18}{35} \approx 0,514 = 51,4\%$$

8. *Esercizio.* 5 ragazzi e 10 ragazze sono disposti in riga in modo casuale.

(a) (2 punti) Calcola il numero di tutti i possibili ordinamenti.

Soluzione Gli ordinamenti sono dati dalle permutazioni di 15 $(= 5 + 10)$ oggetti:

$$P_{30} = 15! = 1\,307\,674\,368\,000$$

(b) (3 punti) Calcola la probabilità che l'i-esima in riga sia una particolare ragazza.

Soluzione Fissando l'i-esimo posto rimangono 14 $(= 15-1)$ elementi che possono essere ordinati liberamente, dando luogo a 14! casi favorevoli. La probabilità di un tale evento è pertanto:

$$\mathrm{Pr} = \frac{P_{14}}{P_{15}} = \frac{14!}{15!} = \frac{1}{15} = 6,\bar{6}\,\%$$

(c) (3 punti) Calcola la probabilità che l'i-esima in riga sia una ragazza.

Soluzione In questo caso il numero di casi favorevoli è $10 \times 14!$: ci sono 10 ragazze ognuna delle quali può dare luogo a 14! possibili casi favorevoli. La probabilità di un tale evento è pertanto:

$$\mathrm{Pr} = \frac{10 \cdot P_{14}}{P_{15}} = \frac{10 \cdot 14!}{15!} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 66,\bar{6}\,\%$$

9. *Problema.* Prese 40 persone a caso dalla popolazione (ed escludendo la possibilità che qualcuna di queste persone sia nata il 29 febbraio di un anno bisestile), qual è la probabilità che:

(a) (3 punti) nessuna di queste sia nata nello stesso giorno dell'anno?

Soluzione Gli ordinamenti possibili delle date di nascita sono tante quante sono le disposizioni con ripetizione di 365 oggetti (i giorni nell'anno) di classe 40:

$$D'_{365,40} = 365^{40}$$

I casi favorevoli sono quelli in cui in questi ordinamenti non ci sono persone nate nello stesso giorno e quindi pari alle disposizioni semplici di 365 oggetti di classe 40:

$$D_{365,40} = \frac{365!}{(365-40)!}$$

La probabilità è data dal rapporto tra i due:

$$\Pr = \frac{D_{365,40}}{D'_{365,40}} = \frac{365!}{365^{40}(365-40)!} \approx 0,1088 = 10,88\%$$

(b) (2 punti) almeno due di queste persone siano nate nello stesso giorno dell'anno?

Soluzione Tale probabilità è data dal complemento ad 1 della probabilità precedente:

$$\Pr = 1 - \frac{365!}{365^{40}(365-40)!} \approx 0.8912 = 89,12\%$$

10. *Problema.* Considera un mazzo di carte da poker, in cui si hanno 13 carte – 2, 3, . . . , 10, J, Q, K, A (Asso) – per ognuno dei 4 semi ($\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit$), per un totale di 52 carte.

(a) (2 punti) Calcola il numero dei possibili "punti del poker", cioè le combinazioni di carte ottenibili prendendo 5 carte dalle 52 del mazzo.

Soluzione Si tratta di calcolare le combinazioni semplici di 52 oggetti di classe 5:

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,(52-5)!} = 2.598.960$$

(b) (3 punti) Calcola il numero di casi possibili in cui le 5 carte estratte siano dello stesso seme.[1] E poi calcola la probabilità che questo avvenga se le 5 carte sono estratte in modo casuale dal mazzo.

[1] Questo è quello che nel gioco del poker si chiama *colore* (*flush*) servito. Di fatto in questo modo stiamo considerando anche i casi in cui si ha in mano una *scala a colore* (*straight flush*) o una *scala reale* (*royal flush*).

Soluzione Le possibili estrazioni di 5 carte di uno stesso seme (13) è dato dalle combinazioni di 13 oggetti di classe 5. Poiché i semi sono 4, il numero di estrazioni possibili in cui si ottengono 5 carte dello stesso seme risulta pari a:

$$4 \cdot C_{13,5} = 4 \cdot \binom{13}{5} = 4 \cdot \frac{13!}{5!\,(13-5!)} = 5.148$$

La probabilità è data dal rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, per cui:

$$\Pr = \frac{4 \cdot C_{13,5}}{C_{52,5}} = \frac{5.148}{2.598.960} \approx 0,00198 = 0,198\%$$

(c) (3 punti) Calcola la probabilità di pescare 4 assi su 5 carte estratte a caso dal mazzo (*poker d'assi* servito).

Soluzione I casi favorevoli sono solo 48: l'unica carta "libera" può assumere solo $(13-1)\cdot 4 = 48$ valori, per cui la probabilità di un poker d'assi servito risulta essere:

$$\Pr = \frac{48}{C_{52,5}} = \frac{48}{2.598.960} \approx 0,0000185 = 0,00185\%$$

(d) (3 punti) (*) Calcola il numero dei casi in cui 3 delle 5 carte hanno lo stesso valore (sono cioè tutti assi, o 2, o 3, ecc.). Calcola la probabilità che questo accada pescando 5 carte a caso dal mazzo.[2]

Soluzione Per ognuno dei 13 valori nel mazzo sono presenti 4 carte uguali. Il numero di combinazioni di 4 oggetti di classe 3 ci dà il numero di casi in cui è possibile scegliere 3 di queste 4 carte. Delle restanti 48 carte $(52-4)$, $C_{48,2}$ sono i casi in cui si possono avere in mano due qualsiasi di queste 48 carte.

Il numero di casi favorevoli è pertanto:

$$13 \cdot C_{4,3} \cdot C_{48,2} = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2} = 58.656$$

Dividendo questo numero per il numero di casi possibili si ottiene la probabilità:

$$\frac{13 \cdot C_{4,3} \cdot C_{48,2}}{C_{52,5}} = \frac{58.656}{2.598.960} \approx 0,02257 = 2,257\%$$

[2] Questo è quello che nel gioco del poker si chiama *tris* (*three of a kind*) servito. In realtà, di fatto in questo modo stiamo considerando anche i casi in cui si abbia un *full* (*full house*), ovvero tris e coppia.