Matematica

9. Funzioni continue e calcolo dei limiti

Giuseppe Vittucci Marzetti[1]

Corso di laurea in Scienze dell'Organizzazione
Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca

A.A. 2020-21

[1]Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126, Milano, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Layout

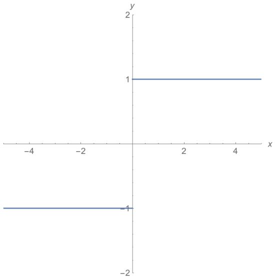
Definizione di funzione continua

- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A \cap A'$ (un punto di accumulazione che appartiene al dominio di f). La funzione si dice **continua** in x_0 quando:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
ovvero quando $\forall \epsilon > 0 \ \exists r > 0$ tale che, se $|x - x_0| < r$, allora $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
- La continuità richiede che:
  1. esistano e siano finiti il limite sinistro e destro:
  2. il limite destro e sinistro coincidano;
  3. tali limiti siano anche uguali al valore assunto dalla funzione nel punto:
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$
- Una funzione si dice **continua in un insieme** quando è continua in ogni punto di tale insieme.

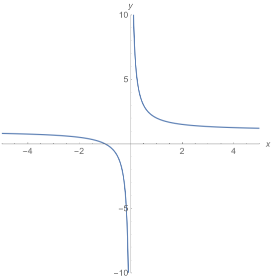
Tipi di discontinuità

- Una funzione è discontinua in un punto x_0, ovvero presenta un punto di discontinuità in x_0, se non è continua nel punto x_0.
- Punti di discontinuità di:
  1. prima specie (**discontinuità a salto**): il limite sinistro e il limite destro esistono e sono finiti, ma non coincidono:
  $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$
  2. seconda specie: almeno uno dei due limiti (sinistro o destro) non esiste oppure è infinito
  $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \begin{cases} \nexists \\ = \infty \end{cases} \vee \lim_{x\to x_0^+} f(x) \begin{cases} \nexists \\ = \infty \end{cases}$$
  3. terza specie (**discontinuità eliminabile**): i limiti sinistro e destro esistono finiti e sono uguali tra loro, ma non coincidono con il valore della funzione nel punto (o la funzione non è definita nel punto):
  $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

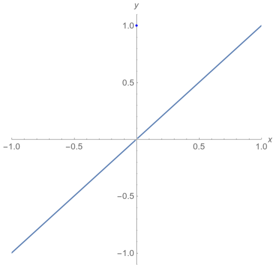
Esempi di discontinuità



(a) Prima specie: $f(x) = \frac{x}{|x|}$



(b) Seconda specie: $f(x) = \frac{x+1}{x}$



(c) Terza specie: $f(x) = x$ se $x \neq 0$ e $f(x) = 1$ se $x = 0$

Nota: negli esempi (a) e (b) le funzioni non sono definite nei punti di discontinuità.

Proprietà delle funzioni continue

- Tutte le funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione.
- Ogni funzione ottenuta a partire da funzioni elementari (come somma, prodotto, quoziente e potenza delle stesse) o deriva da composizione di funzioni elementari è continua nel suo insieme di definizione.
- **Teorema di Weierstrass**: Ogni funzione continua su un insieme *chiuso* e *limitato* assume valore massimo e valore minimo.
- **Teorema di Darboux**: Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato assume in tale intervallo, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo.
- **Teorema degli zeri** (corollario al teorema di Darboux): Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato [a,b] con $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in [a, b] : f(c) = 0$.

Limiti fondamentali

- Funzione costante $f(x) = k$: $\lim_{x \to \pm\infty} k = k$
- Funzione identità $f(x) = x$: $\lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$.
- Funzione esponenziale $f(x) = a^x$ con base:
  - maggiore di 1 $(a > 1)$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0; \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
  - minore di 1 $(0 < a < 1)$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty; \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$
- Funzione potenza $f(x) = x^n$ con esponente
  - pari: $\lim_{x \to \pm\infty} x^n = +\infty$
  - dispari: $\lim_{x \to \pm\infty} x^n = \pm\infty$
- Funzione radice $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con indice
  - pari: $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
  - dispari: $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[n]{x} = \pm\infty$
- Funzione logaritmica $f(x) = \log_a x$ con base:
  - maggiore di 1 $(a > 1)$: $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty; \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$
  - minore di 1 $(0 < a < 1)$:
    $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty; \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$
- Funzione valore assoluto $f(x) = |x|$: $\lim_{x \to \pm\infty} |x| = +\infty$.

Operazioni con i limiti

Date f e g due funzioni definite su uno stesso insieme A, con $x_0 \in A'$, se esistono i limiti al secondo membro valgono le seguenti uguaglianze:

- Il limite della somma è uguale alla somma dei limiti:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(l'uguaglianza perde di significato se si ottiene la forma indeterminata $+\infty - \infty$).

- Il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(l'uguaglianza perde di significato se si ottiene la forma indeterminata $0 \cdot \infty$).

- Il limite del rapporto è uguale al rapporto dei limiti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

(l'uguaglianza perde di significato se si ottengono le forme indeterminate $0/0$ o ∞/∞).

Operazioni con i limiti

- $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^{\pm}$$
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^{\pm} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$$

- $$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$
  (l'uguaglianza perde di significato se si ottengono le forme indeterminate 1^{∞}, 0^0 o ∞^0).

- Limite di funzioni composte: supponendo che g sia una funzione continua in $y_0 = f(x_0)$
  $$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] \quad = \quad g\left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]$$

Algebra di infiniti e infinitesimi

$\forall\, k \in \mathbb{R} : k > 0$ e $\forall\, n \in \mathbb{N} : n > 0$

$$k \pm \infty = \pm\infty;$$

$$k \cdot 0^{\pm} = 0^{\pm}; \quad -k \cdot 0^{\pm} = 0^{\mp}; \quad 0^{+} \cdot 0^{\pm} = 0^{\pm}; \quad 0^{-} \cdot 0^{-} = 0^{+};$$

$$k \cdot \pm\infty = \pm\infty; \quad -k \cdot \pm\infty = \mp\infty; \quad +\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty; \quad -\infty \cdot \pm\infty = \mp\infty;$$

$$\frac{k}{0^{\pm}} = \pm\infty; \quad \frac{-k}{0^{\pm}} = \mp\infty;$$

$$\frac{k}{\pm\infty} = 0^{\pm}; \quad \frac{-k}{\pm\infty} = 0^{\mp}; \quad \frac{0^{+}}{\pm\infty} = 0^{\pm}; \quad \frac{0^{-}}{\pm\infty} = 0^{\mp};$$

$$\frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty; \quad \frac{\pm\infty}{-k} = \mp\infty; \quad \frac{\pm\infty}{0^{+}} = \pm\infty; \quad \frac{\pm\infty}{0^{-}} = \mp\infty;$$

$$+\infty^{n} = +\infty; \quad +\infty^{-n} = 0^{+}; \quad +\infty^{+\infty} = +\infty; \quad +\infty^{-\infty} = 0^{+};$$

$$\sqrt[n]{+\infty} = +\infty; \quad \sqrt[n']{-\infty} = -\infty \quad n' \text{ dispari.}$$

Forme di indecisione (o di indeterminazione)

Nelle seguenti sette forme, che coinvolgono funzioni il cui limite è ∞ (**infiniti**) e 0 (**infinitesimi**), il valore del limite dipende dal comportamento delle specifiche funzioni coinvolte.

- Somma:
$$+\infty - \infty$$
- Prodotto:
$$0 \cdot \infty$$
- Quoziente:
$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$
- Potenza:
$$1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}$$

Ordine di infinito

- Una funzione f si dice infinita per $x \to x_0$ quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
- Data una funzione infinita $g(x)$ per $x \to x_0$, rispetto a $g(x)$ (**infinito campione**, o **fondamentale**), la funzione f è un **infinito di ordine a** ($a \in \mathbb{R}$) se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^a} = k \neq 0$$

- Per un generico polinomio $f(x)$ di grado n:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_n\, x^n$$

assumendo $g(x) = x$, l'ordine di infinito per $x \to +\infty$ corrisponde al grado del polinomio (n).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^{i-n} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right) = a_n$$

Confronto degli ordini di infinito

- Date due funzioni infinite f e g per $x \to x_0$, per confrontarle consideriamo il limite del loro rapporto.
  - f è **infinita di ordine inferiore** rispetto a g se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

  - f e g sono **infinite dello stesso ordine** se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$$

  - f è **infinita di ordine superiore** rispetto a g se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

  - i due infiniti non sono confrontabili se:

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Gerarchia degli infiniti e velocità di divergenza

- Tra le funzioni elementari e gli ordini di infinito che generano per $x \to +\infty$ valgono le relazioni seguenti:

$$\log_a x \ll x^b \ll x^c \ll d^x \ll g^x \ll x^x$$

con $a > 0$, $a \neq 1$, $0 < b < c$, $1 < d < g$, dove $<<$ ("molto minore di") indica il passaggio a un ordine di infinito superiore.

- In modo analogo, data una funzione infinita $f(x)$ per $x \to x_0$:

$$\log_a f(x) \ll f(x)^b \ll f(x)^c \ll d^{f(x)} \ll g^{f(x)} \ll f(x)^{f(x)}$$

con $a > 0$, $a \neq 1$, $0 < b < c$, $1 < d < g$.

Principio di eliminazione degli infiniti di ordine inferiore

- Per $x \to x_0$, siano date le funzioni $f(x), F(x), g(x), G(x)$ con
  - F infinita di ordine superiore rispetto a f: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = 0$
  - G infinita di ordine superiore rispetto a g: $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{G(x)} = 0$

  se i limiti esistono si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f(x)}{F(x)}+1\right)F(x)}{\left(\frac{g(x)}{G(x)}+1\right)G(x)}$$
$$= \frac{\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{F(x)}+1\right)\lim_{x\to x_0} F(x)}{\left(\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{G(x)}+1\right)\lim_{x\to x_0} G(x)}$$
$$= \frac{(0+1)\lim_{x\to x_0} F(x)}{(0+1)\lim_{x\to x_0} G(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} F(x)}{\lim_{x\to x_0} G(x)}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{G(x)}$$

- In somme/differenze di infiniti può considerarsi solo l'inf. di ordine superiore, che prende il nome di **parte principale dell'infinito**.

Ordine di infinitesimo

- Una funzione f si dice infinitesima per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
- Data una funzione infinitesima $g(x)$ per $x \to x_0$, rispetto a $g(x)$ (**infinitesimo campione**, o **fondamentale**), la funzione f è un **infinitesimo di ordine a** ($a \in \mathbb{R}$) se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^a} = k \neq 0$$

- Per un generico polinomio $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{i=m}^{m+n} a_i\, x^i = a_m\, x^m + a_{m+1}\, x^{m+1} + \ldots + a_{m+n}\, x^{m+n}$$

assumendo $g(x) = x$, l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ corrisponde all'esponente minore (m).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sum_{i=m}^{m+n} a_i\, x^i}{x^m} = \lim_{x \to 0} \sum_{i=m}^{m+n} a_i\, x^{i-m} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(a_m + a_{m+1} x + \ldots + a_{m+n} x^n\right) = a_m$$

Confronto di ordini di infinitesimo

- Date due funzioni infinitesime f e g per $x \to x_0$, per confrontarle consideriamo il limite del loro rapporto.
  - f è **infinitesima di ordine superiore** rispetto a g se:
    $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
  - f e g sono **infinitesime dello stesso ordine** (zeri di pari ordine) se
    $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$$
  - f è **infinitesima di ordine inferiore** rispetto a g se:
    $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$
  - i due infinitesimi non sono confrontabili se:
    $$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ordini di infinitesimo e velocità di convergenza a zero

- Per $x \to 0$, le potenze generano ordini di infinitesimo superiori al crescere dell'esponente:
$$x^a \ll x^b$$
con $a > b > 0$.
- Più una funzione diverge velocemente all'infinito, più il suo reciproco converge velocemente a zero:
$$\frac{1}{x^x} \ll \frac{1}{g^x} \ll \frac{1}{d^x} \ll \frac{1}{x^c} \ll \frac{1}{x^b} \ll \frac{1}{\log_a x}$$
con $a > 0$, $a \neq 1$, $0 < b < c$, $1 < d < g$,

Principio di eliminazione degli infinitesimi di ordine superiore

- Per $x \to x_0$, siano date le funzioni $f(x), F(x), g(x), G(x)$ con
  - F infinitesimo di ordine superiore rispetto a f: $\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{f(x)} = 0$
  - G infinitesimo di ordine superiore rispetto a g: $\lim_{x\to x_0} \frac{G(x)}{g(x)} = 0$

  se i limiti esistono si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\left(1+\frac{F(x)}{f(x)}\right)}{g(x)\left(1+\frac{G(x)}{g(x)}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{F(x)}{f(x)}\right)}{\lim_{x\to x_0} g(x) \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{G(x)}{g(x)}\right)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- In una somma/differenza di infinitesimi si può considerare solo l'infinitesimo di ordine inferiore, che prende il nome di **parte principale dell'infinitesimo**.

Simbolo o

- Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di x_0, per $x \to x_0$ si ha
$$f(x) = o(g(x))$$
se
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- f è **"o piccolo" di g per x che tende a x_0** se f assume valori che sono trascurabili rispetto a quelli assunti da g nell'intorno x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = o(1)$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = k + o(1)$$

- Per il simbolo "o piccolo" valgono le seguenti uguaglianze:

$$o(k\,g(x)) = o(g(x)) \qquad \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0$$
$$h(x)\,o(g(x)) = o(h(x)g(x))$$

Asintoti obliqui

- Una funzione f definita in un intorno di $+\infty$ $(-\infty)$ e tale che:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

ammette un **asintoto obliquo**, dato dalla retta $y = mx + q$, se per $x \to \infty$ si ha:

$$f(x) = mx + q + o(1)$$

- In particolare, il grafico di f ammette la retta $y = mx + q$ come asintoto obliquo se e solo se esistono e sono finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$$
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = q$$