

ESERCIZIO 1 Dire se la funzione è continua nell'intervallo dato e, nel caso non lo sia, determinare la natura dei punti di discontinuità.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{x^2 - 2x - 3} & \text{se } x < 0 \quad x \neq -1 \quad x \neq -2 \\ 3 & \text{se } x = 0 \quad x = -1 \quad x = -2 \\ \sqrt{x^2 + 9} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$ La funzione è continua negli intervalli $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

Proviamo la continuità nei punti $x = 0 \quad x = -1 \quad x = -2$

$x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{0 + 9} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2 \cdot 0}{0 - 0 - 3} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad ; \quad f(0) = 3$$

$x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie (o discontinuità a salto)

$x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \quad ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2(-1)^2}{(-1)^2 - 2(-1) - 3} = \frac{2}{1 + 2 - 3} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$= \frac{2}{1^+ + 2^+ - 3} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2 \cdot (-1^+)^2}{(1^+)^2 - 2(-1^+) - 3} = \frac{2}{0^-}$$

$$= -\infty$$

$$f(-1) = 3$$

$x = -1$ è un punto di discontinuità di seconda specie

$$x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \quad ? \quad f(-2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2(-2^-)^2}{(-2^-)^2 - 2(-2^-) - 3} =$$

$$= \frac{8}{4 + 4 - 3} = \frac{8}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2(-2^+)^2}{(-2^+)^2 - 2(-2^+) - 3} =$$

$$= \frac{8}{4 + 4 - 3} = \frac{8}{5}$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{8}{5} \neq f(-2) = 3$$

$x = -2$ è un punto di discontinuità di terza specie (o discontinuità eliminabile)

ESERCIZIO 2 Calcolare i seguenti limiti

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 2x^2)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{x})(e^{\frac{2}{x}} - 2)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(5 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x}\right)$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} (2+x)^{3x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(1 - \frac{2}{\log x}\right)$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{5}{x} - 2\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{x})(e^{\frac{2}{x}} - 2) = (1 + \infty)(e^{\frac{2}{\infty}} - 2) =$
 $\infty \cdot (e^0 - 2) = \infty(1 - 2) = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1} = \frac{\infty \cdot \sqrt{\infty}}{\infty^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ [FI]}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cancel{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(5 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x}\right) = 5 + \frac{1}{\sqrt{0^2+1}} - \frac{1}{0^-} = 5 + 1 + \infty =$
 $-3-$

$$= 6 + \infty = +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} (2+x)^{3x} = (2+1)^{3 \cdot 1} = 3^3 = 27$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(1 - \frac{2}{\log x}\right) = 0^+ \left(1 - \frac{2}{\log 0^+}\right) = 0^+ \left(1 - \frac{2}{-\infty}\right)$$

$$= 0^+ (1+0) = 0^+ (1) = 0^+$$

ESERCIZIO 3 Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x-3} \quad (e: \begin{matrix} x-3 \neq 0 \\ x \neq 3 \end{matrix})$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

ASINTOTI VERTICALI

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x}{x-3} = \frac{(3^-)^2 + (3^-)}{3^- - 3} = \frac{9+3}{0^-} =$$

$$= \frac{12}{0^-} = -\infty$$

$x=3$ ASINTOTO VERTICALE SINISTRO

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x}{x-3} = \frac{(3^+)^2 + 3^+}{3^+ - 3} = \frac{9+3}{0^+} = \frac{12}{0^+}$$

$$= +\infty \quad x=3 \text{ ASINTOTO VERTICALE DESTRO}$$

$\Rightarrow x=3$ ASINTOTO VERTICALE PER LA FUNZIONE

ASINTOTI ORIZZONTALI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = +\infty$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ NON VI È L'ASINTOTO ORIZZONTALE
 $A + \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ NON VI È L'ASINTOTO ORIZZONTALE
 $A - \infty$

ASINTOTI OBLIQUI

L'asintoto obliquo è una retta del tipo

$$y = mx + q$$

dove $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$

• ASINTOTO OBLIQUO $A + \infty$ (o destro)

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x - 3} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = 1 \quad m = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x - 3} - x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2 + 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)} =$$

$$= 4 \quad q = 4$$

$y = x + 4$ e asintoto obliquo a $+\infty$

• ASINTOTO OBLIQUO A $-\infty$ (o sinistro)

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 3} \cdot \frac{1}{x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = 1 \quad m = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 3} - x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2} + 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x - 3} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\cancel{x}}{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = 4 \quad q = 4$$

$y = x + 4$ e asintoto obliquo a $-\infty$

$\Rightarrow y = x + 4$ e asintoto obliquo sia destro che sinistro \Rightarrow

$y = x + 4$ e asintoto obliquo bilatero

ESERCIZIO 4 Stabilire se la relazione

$a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e' vera essendo

$$a_n = \log(1+n) \quad e \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ per

$x \rightarrow +\infty$ si ha che

$$f(x) = o(g(x))$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Verifichiamo se $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+n)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \log(1+n) \cdot \sqrt{n} &= \log(1+\infty) \cdot \sqrt{+\infty} = \log(\infty) \cdot \infty \\ &= \infty \cdot \infty = \infty \neq 0 \end{aligned}$$

Dunque $a_n = o(b_n)$ e' una relazione falsa

ESERCIZIO 5 Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni

a) $f(x) = 6x + 4$

b) $f(x) = x^3 + x + \sqrt{x}$

c) $f(x) = \log_3 x + 3^x$

$$d) f(x) = 2x - \sqrt[3]{x}$$

$$e) f(x) = \sqrt{4x+1}$$

$$f) f(x) = e^{3x+1}$$

$$a) f(x) = 6x+4 \quad f'(x) = 6+0 = 6$$

$$b) f(x) = x^3 + x + \sqrt{x} \quad f'(x) = 3x^2 + 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$c) f(x) = \log_3 x + 3^x \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 3^x \ln 3$$

$$d) f(x) = 2x - \sqrt[3]{x} = 2x - x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = 2 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 2 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$e) f(x) = \sqrt{4x+1} = (4x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}-1} (4x+1)' = \frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

$$f) f(x) = e^{3x+1} \quad f'(x) = e^{3x+1} (3x+1)' = \Delta$$

$$f'(x) = e^{3x+1} \cdot 3 = 3e^{3x+1}$$

ESERCIZIO 6 Calcolare le prime Tre derivate delle seguenti funzioni

a) $f(x) = \log(x^2+1)$

b) $f(x) = e^{2x^2}$

a) $f(x) = \log(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (2-2x^2)2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1) [-4x(x^2+1) - 4x(2-2x^2)]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+1)} (-4x) [x^2+1 + 2 - 2x^2]}{(x^2+1)^{4-3}} =$$

$$= \frac{-4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$b) f(x) = e^{2x^2}$$

$$f'(x) = e^{2x^2} (4x) = 4x e^{2x^2}$$

$$f''(x) = 4(e^{2x^2}) + 4x(e^{2x^2})(4x) = \\ = 4e^{2x^2} + 16x^2 e^{2x^2} = 4e^{2x^2} (1 + 4x^2)$$

$$f'''(x) = 4e^{2x^2} (4x)(1 + 4x^2) + 4e^{2x^2} (8x) = \\ = 16xe^{2x^2} (1 + 4x^2 + 2) \\ = 16xe^{2x^2} (4x^2 + 3)$$

ESERCIZIO 7 Calcolare i seguenti limiti utilizzando il Teorema di De L'Hopital

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \log x}{2x + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{1}{2-x}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \log x}{2x + 1} = \frac{3\infty + \log \infty}{2\infty + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ [F.I.]}$$

Possiamo applicare il teorema di De L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \log x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx}(3x + \log x)}{\frac{d}{dx}(2x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3 + \frac{1}{x})}{2x} =$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{1}{2-x}} = (3-2)^{\frac{1}{2-2}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

Riscriviamo $\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\log(3-x)^{\frac{1}{2-x}}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{2-x} \log(3-x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(3-x)}{2-x}}$$

Riscriviamo $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(3-x)}{2-x} = \frac{\log(3-2)}{2-2} = \frac{0}{0}$

Applico de L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(3-x)}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{3-x}(-1)}{-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{1}{2-x}} = e^1 = e$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0^+ \ln 0^+ = 0^+ (\neq \infty) \text{ FI}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ FI Possiede}$$

applicare de L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cancel{\frac{1}{x}} \cdot (-x^2) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

ESERCIZIO 8 Scrivere lo sviluppo di Taylor
arrestato al terzo ordine, con punto iniziale
 $x=2$, di $f(x) = 5x^2 + 7x - 2$

$$N=3 \quad x_0=2$$

$$f(2) = 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 2 = 32$$

$$f'(x) = 10x + 7$$

$$f'(2) = 10 \cdot 2 + 7 = 27$$

$$f''(x) = 10$$

$$f''(2) = 10$$

$$f'''(x) = 0$$

$$f'''(2) = 0$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}$$

$$+ o(x-x_0)$$

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)(x-2)}{1!} + \frac{f''(2)(x-2)^2}{2!} +$$

$$+ \frac{f'''(2)(x-2)^3}{3!} + o(x-2)$$

$$f(x) = 32 + 27(x-2) + \frac{5}{\cancel{2} \cdot 1} (x-2)^2 + \frac{0(x-2)^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} + o(x-2)$$

$$f(x) = 32 + 27(x-2) + 5(x-2)^2 + o(x-2)$$

$$f(x) = 32 + 27x - 54 + 5(x^2 + 4 - 4x) + o(x-2)$$

$$f(x) = 32 + 27x - 54 + 5x^2 + 20 - 20x + o(x-2)$$

$$f(x) = 5x^2 + 7x - 2 + o(x-2)$$