Matematica
Esempio esame Unità 10-11

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

Dicembre 2018

1. *Esercizio.* Calcolare la *derivata* delle seguenti funzioni.
   (a) (1 punto) $f(x) = 4 + 2x$
   (b) (2 punti) $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$
   (c) (2 punti) $f(x) = \frac{1-x}{x+3}$
   (d) (2 punti) $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}$
   (e) (2 punti) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2-1}$
   (f) (2 punti) $f(x) = \log_2 x - 2^{x-1}$
   (g) (2 punti) $f(x) = \ln x^x$
   (h) (2 punti) $f(x) = x^x$

2. *Esercizio.* Calcolare le *derivate prima* e *seconda* delle seguenti funzioni.
   (a) (2 punti) $f(x) = a + b\,x$, dove a e b sono due parametri dati ($a, b \in \mathcal{R}$).
   (b) (2 punti) $f(x) = ax^3 + b\,x^2 + c$, dove a e b sono due parametri dati ($a, b \in \mathcal{R}$).
   (c) (2 punti) $f(x) = \frac{a}{x+b}$, dove a e b sono due parametri dati ($a, b \in \mathcal{R}$).
   (d) (2 punti) $f(x) = \mathrm{e}^{-a\cdot x}$, dove a è un parametro dato ($a \in \mathcal{R}$).
   (e) (2 punti) $f(x) = \frac{\log_2(x+1)}{x}$

3. *Esercizio.* Calcola i seguenti limiti utilizzando dove possibile il *teorema di De l'Hôpital*:
   (a) (3 punti) $\lim_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^{x+1}$
   (b) (2 punti) $\lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{2-x}}$
   (c) (2 punti) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+\ln x^2}$

4. *Esercizio.* Scrivere lo *sviluppo di Taylor* all'ordine N con centro x_0 delle seguenti funzioni.

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

(a) (2 punti) $f(x) = \sqrt{1+2x}$, $N = 2$, $x_0 = 1$.
(b) (2 punti) $f(x) = \ln(1+2x^2)$, $N = 3$, $x_0 = 0$.
(c) (2 punti) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $N = 4$, $x_0 = 0$.

5. *Problema.* Immagina di aver osservato diverse volte il cestista della tua squadra di pallacanestro e sai che, quando tira tre tiri liberi, tende sempre a totalizzare due punti (fa due canestri su tre). Sai anche che, supponendo che i tre tiri siano eventi indipendenti (il risultato in uno dei tiri non influenza l'esito degli altri), la probabilità di fare due canestri su tre è data da:[1]

$$f(p) = 3p^2(1-p)$$

dove $p \in [0,1]$ è la probabilità che il cestista faccia canestro ogni singolo tiro.

(a) (2 punti) Calcola il valore della funzione negli estremi dell'intervallo $[0,1]$ e discuti se sono soddisfatte le ipotesi del *teorema di Rolle*.
(b) (3 punti) Calcola la *derivata prima* e *seconda* della funzione nell'insieme di definizione e individua i *punti stazionari* e gli eventuali *punti di flesso*.
(c) (2 punti) Individua il punto p_0 di *massimo assoluto* e disegna il grafico della funzione.
(d) (2 punti) Discuti molto brevemente l'interpretazione del grafico e del punto di massimo assoluto individuati al punto precedente.

6. *Problema.* I BOT (Buoni Ordinari del Tesoro) sono titoli del debito pubblico italiano, ovvero prestiti concessi dagli investitori allo Stato italiano, di breve termine (con scadenza di 3, 6 o 12 mesi), per un periodo molto ridotto. Ogni BOT ha valore nominale minimo di 1.000 euro, anche se il prezzo viene espresso sempre per 100 euro di valore nominale.

Si tratta di titoli "zero coupon", in cui il rendimento non è basato sul pagamento di una cedola (coupon), ma deriva dalla differenza tra il valore nominale (100), che è la somma che verrà pagata a scadenza al possessore del titolo, e il prezzo di emissione (P).

Considerando un BOT con scadenza 6 mesi, il prezzo di emissione (P) è collegato al rendimento r (su base annuale espresso in termini percentuali) come segue:

$$P = \frac{100}{1 + \frac{2r}{100}}$$

(a) (3 punti) Calcola il *limite* di P per $r \to +\infty$, la *derivata prima* e *seconda* di P rispetto ad r e interpreta il risultato. Il prezzo di emissione aumenta o diminuisce all'aumentare del rendimento? La reattività del prezzo al rendimento aumenta o diminuisce all'aumentare del rendimento?
(b) (2 punti) Considera la funzione nell'intervallo chiuso e limitato $r \in [-2, 100]$. Identifica massimo e minimo e disegna il grafico della funzione.

7. *Problema.* Immagina di tirare una moneta n volte e di totalizzare testa k ($\leq n$) volte. Non sai se la moneta è truccata o no, ma sai che, se la probabilità di fare testa su un lancio è p, la probabilità di fare testa k volte su n lanci è:

$$L(p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

con $p \in (0,1)$.

[1] Questo è un particolare valore di una distribuzione che in statistica è nota come *distribuzione binomiale*.

(a) (2 punti) Calcola la *derivata prima* del logaritmo naturale di $L(p)$, $\ln L(p)$, e i relativi *punti stazionari* della funzione.

(b) (2 punti) Calcola la *derivata seconda* e determina la *concavità/convessità* di $\ln L(p)$.

(c) (2 punti) Calcola il *punto di massimo assoluto* e interpreta il risultato.

8. *Problema.* Supponi che i costi totali (C) che la tua società affronta per produrre un determinato prodotto abbiano una componente fissa, pari a 1500 euro al mese, e una componente variabile, pari a 2 euro per ogni unità prodotta (x):

$$C(x) = 1500 + 2x$$

Ipotizza che il prezzo a cui riesci a vendere i tuoi prodotti (p) sia una funzione decrescente della quantità. In particolare, assumi che il prezzo decresca linearmente con la quantità venduta mensilmente secondo questa relazione:

$$p(x) = 502 - 5x$$

(a) (2 punti) Sapendo che i *ricavi* mensili della società sono pari al prezzo di vendita (p) per la quantità venduta (x) e che i profitti sono dati dalla differenza tra ricavi e costi, deriva la *funzione di profitto*, che lega i profitti (Π) alla quantità prodotta (x).

(b) (4 punti) Calcola la *derivata prima* e *seconda* della funzione di profitto, le *radici* (gli *zeri*) della funzione e disegna il *grafico* della funzione.

(c) (2 punti) Determina: i) la/le quantità di *break-even* (quelle in corrispondenza delle quali il profitto è nullo); ii) la quantità che massimizza il profitto; iii) il profitto massimo.

(d) (2 punti) Supponi che la società riesca a vendere tutte le unità che produce ad un prezzo pari a 5 euro. Calcola la funzione di profitto in questo caso e determina la quantità di break-even e il profitto massimo ottenibile dalla società in questo caso.

(e) (2 punti) Supponi che la società riesca a vendere mensilmente fino a 1000 unità prodotte ad un prezzo costante e pari a 4 euro, mentre le unità oltre la millesima riesca a venderle solo ad un prezzo pari a 1 euro l'una. Deriva la funzione di profitto in questo caso e disegna il grafico associato.

(f) (2 punti) Calcola la derivata della funzione di profitto ottenuta al punto precedente e determina la quantità che massimizza il profitto dell'impresa.

9. *Problema.* La classe di funzioni note come *funzioni logistiche* ha applicazioni in campi disparati come l'ecologia, la fisica, la statistica, il *machine learning*, l'economia e la sociologia (ad es. nei modelli di diffusione delle innovazioni).

La seguente funzione logistica viene derivata nel *modello di Verhulst*, che analizza la crescita della popolazione e in cui si assume che questa cresca esponenzialmente, ma ad un tasso che diminuisce al diminuire delle risorse:

$$y(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-g \cdot t}}$$

dove e è il numero di Nepero (o Eulero); y_0, g e k sono *parametri strettamente positivi* che indicano, rispettivamente, la popolazione iniziale, il tasso di crescita in assenza di limitazioni e la cosiddetta *carrying capacity* (la capacità di carico determinata dalle risorse disponibili), ipotizzata maggiore del livello iniziale della popolazione ($k > y_0 > 0$); t è il tempo; $y(t)$ la popolazione nell'istante t.

(a) (1 punto) Determina l'*insieme di esistenza* della funzione.

(b) (2 punti) Determina le *intersezioni con gli assi* e il *segno della funzione*: $y(t) \geq 0$.

(c) (2 punti) Calcola il *limite* di $y(t)$ per $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$.

(d) (3 punti) Calcola la *derivata prima* e determina i valori per cui la funzione è *crescente/decrescente* studiandone il segno.

(e) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* e determina la *concavità/convessità* della funzione e gli eventuali *punti di flesso*.

(f) (2 punti) Calcola *massimi*, *minimi* ed *estremi superiore* ed *inferiore* di $y(t)$.

(g) (2 punti) Disegna un *grafico qualitativo* della funzione $y(t)$ ipotizzando che $k = 2y_0$.