

Indice

1	Domini e curve di livello di funzioni in più variabili.	1
2	Limiti.	1
3	Continuità e differenziabilità.	2
4	Ulteriori esercizi	5
4.1	Funzioni convesse	7
4.2	Matrice Jacobiana	7

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).
 Gli esercizi con “*” sono più difficili degli altri !

1 Domini e curve di livello di funzioni in più variabili.

1. Delle funzioni di seguito indicate, si determini il dominio, lo si disegni e si traccino alcune curve di livello:

$f_1(x, y) = \log(x - y)$	$f_2(x, y) = e^{x^2+2y^2} - 1$
$f_3(x, y) = xy$	$f_4(x, y) = \frac{x^2}{y}$
$f_5(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$	$f_6(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$
$f_7(x, y) = xe^{-y}$	$f_8(x, y) = \sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$
$f_9(x, y) = \frac{y}{x}e^x$	$f_{10}(x, y) = x(y - \log x)$

2. Sia $f(x, y) = \log\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$. Si determini il dominio e le curve di livello di f .
3. Sia $f(x, y) = \sqrt[4]{9 - x^2 - y^2}$. Si determini il dominio di f e si disegni il grafico $z = f(x, y)$.
4. Sia $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$. Si determini le curve di livello di f .
- 5.* Sia $z = f(x, y)$ la funzione definita da $z \geq 0$, $x^2 + (y - z)^2 = 2z^2$. Si determinino le curve di livello della funzione f ;
6. Delle funzioni di seguito indicate si descrivano le superfici di livello:

$f_1(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$	$f_2(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^3$
$f_3(x, y, z) = 2^{x^2 + y^2}$	$f_4(x, y, z) = e^{ x + y + z }$

2 Limiti.

1. Determinare, nel caso in cui esistono, i seguenti limiti di funzione

$$\begin{array}{ll}
 a. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 y} & b. \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2 + y^2} \\
 c. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+2y} & d. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2} \\
 e. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & f. \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{\sqrt[3]{1-xy} - 1}{y} \\
 g. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4} & h. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3 x + \sin(yx^2)}{x^2 + y^4}
 \end{array}$$

[a. 0. b. 0. c. \exists . d. \exists . e. \exists . g. \exists . h. 0.]

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = ye^{\frac{y}{x}}$. Si calcoli

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

[\exists .]

3. Determinare, se esistono, i seguenti limiti di funzione

$$\begin{array}{ll}
 a. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt[3]{xy})}{\sqrt[3]{x^2 + y^4}} & b. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[5]{x} \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[30]{(x^2 + |y|)^{23}}}
 \end{array}$$

[a. 0. b. \exists .]

3 Continuità e differenziabilità.

1. Si stabilisca se esiste qualche funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che per $(x, y) \neq 0$ si abbia

$$f(x, y) = \frac{[(x-1)^2 + y^2] \log[(x-1)^2 + y^2]}{|x| + |y|}$$

[No.]

2. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2 - y^2}{y^2 + 4x^2} \arctan(x\sqrt{x^2 + y^2}), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Si stabilisca

- se la funzione f è continua nell'origine;
- se la funzione f è differenziabile nell'origine.

[a. Si. b. Si.]

3. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2} \arctan(x^2 + y^2), & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Si stabilisca

- se la funzione f è continua nell'origine;
- si calcolino le derivate parziali in $(0, 0)$.

[a. No. b. $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.]

4. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} (y^3 - 27x^3) \log|y - 3x|, & \text{se } y \neq 3x \\ 0, & \text{se } y = 3x \end{cases}$$

Si stabilisca per quali punti della retta $y = 3x$

- a. la funzione f è continua;
- b. f ammette derivate parziali;
- c. f è differenziabile.

[a. Tutti. b. Solo $(0,0)$. c. Solo $(0,0)$.]

5. Sia

$$f(x, y) = \sqrt[7]{x^4 \sin^3(y)}$$

- a. Per ogni versore $v = (\cos \beta, \sin \beta)$ si calcoli la derivata direzionale $D_v f(0, 0)$;
- b. si stabilisca, in base al risultato precedente, se esiste il piano tangente al grafico della funzione in $(0, 0)$.

[a. $\sqrt[7]{\cos^4 \beta \sin^3 \beta}$. b. No.]

6.* Sia α reale e positivo e

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + y^4}{(x^2 + y^2)^\alpha + x^2 y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Per quali α

- a. f è continua nell'origine;
- b. f ammette derivate parziali nell'origine;
- c. f è differenziabile nell'origine.

[a. $\alpha < 2$. b. $\alpha < 3/2$. c. $\alpha < 3/2$.]

7. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x^2, x \neq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- a. Si stabilisca se la funzione f è continua e se è differenziabile nell'origine;
- b. per ogni versore $v = (v_1, v_2)$ si calcoli la derivata direzionale $D_v f(0, 0)$;
- c. f è continua in $\{(x, y) : y \leq 0\}$?

8.* Sia

$$f(x, y) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-xyt^2}}{t} dt$$

Si provi che f è definita e differenziabile su tutto \mathbb{R}^2 . Si calcoli

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

[0.]

9.* Sia α reale fissato e

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^2)^\alpha}{x^2 y + y^3}, & \text{se } y \neq 0 \\ x, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Si stabilisca per quali valori di α

- a. la funzione f è continua nell'origine;
- b. la funzione f è differenziabile nell'origine.

[a. $\alpha > 3/4$. b. Nessuno.]

10.* Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)e^{-\frac{y^2}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si stabilisca per quali y_0

- a. la funzione f è continua in $(0, y_0)$;
 b. la funzione f è differenziabile in $(0, y_0)$.

[a. $\forall y_0$. b. $\forall y_0 \neq 0$.]

11. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{(x^3 - x \sin^2 y)} - 1}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Si stabilisca se nell'origine

- a. la funzione f è continua;
 b. la funzione f ammette derivate direzionali $D_v f(0, 0)$ e in caso affermativo le si calcoli;
 c. la funzione f è differenziabile.

[a. Si. b. Si. c. No.]

12. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, nulla sugli assi coordinati e definita da $f(x, y) = x^2 \log |xy|$ nel complementare degli assi è differenziabile in $(0, 0)$? [No.]

13.* Sia α parametro reale e

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y}{|x| + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a. Dimostrare che f è continua in $(0, 0)$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$;
 b. dimostrare che f è differenziabile $(0, 0)$ se e solo se $\alpha > 1$.

14. Sia $\alpha > 0$ e

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right)^{\alpha/2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Al variare di α

- a. si stabilisca se f è continua e differenziabile $(0, 0)$;
 b. si calcolino le derivate parziali in $(0, 0)$.

[a. continua $\forall \alpha$, differenziabile $\forall \alpha > 1$. b. $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.]

15. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $n \geq 2$, definita da

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \left(1 - e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{|x_1|}} \right) & \text{se } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x_1 = 0 \end{cases}$$

ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ indica un vettore e $\|\mathbf{x}\|$ la sua norma euclidea.

- a. Si stabilisca se f è continua nell'origine $\mathbf{0}$;
 b. si calcolino $\nabla f(\mathbf{0})$ e $D_v f(\mathbf{0})$, dove v è una qualsiasi direzione;
 c. si stabilisca se f è differenziabile in $\mathbf{0}$.

[a. Si. b. $D_v f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\forall v$. c. No.]

16. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- a. Si stabilisca se f è continua nell'origine e ivi differenziabile;
 b. si calcoli $\nabla f(0)$ e $D_v f(0)$, dove v è una qualsiasi direzione.

[a. No.]

17. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \\ -\sqrt{xy} & \text{se } x < 0, y < 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Si stabilisca se f è differenziabile nell'origine;
- si calcoli, se esiste, la derivata direzionale nell'origine secondo la direzione del vettore $(1, 1)$.

[a. No.]

18. Si stabilisca se la funzione

$$f(x, y) = \log \left(\frac{1 - |x - y|}{1 - |x|} \right)$$

è differenziabile nell'origine.

[a. No.]

19. Si stabilisca in quali punti del suo dominio la funzione

$$f(x, y) = |y - 1| (e^{xy} - 3)$$

è differenziabile.

20. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

- Si calcoli $D_v f(0)$, dove v è una qualsiasi direzione;
- si stabilisca se f è differenziabile nell'origine.

[b. No.]

4 Ulteriori esercizi

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 e^{-\|\mathbf{x}\|}$$

ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ indica un vettore e $\|\mathbf{x}\|$ la sua norma euclidea.

- Si disegni il profilo di f ;
- si calcolino $\nabla f(\mathbf{x})$ e $D_v f(\mathbf{x})$, dove v è la direzione individuata dal vettore $(-1, 1)$;
- si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, 2/e^2)$;
- si scriva la formula di Taylor di f centrata in $(1, 0)$, arrestata al secondo ordine.

2. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $n \geq 2$, definita da

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \log \|\mathbf{x}\| & \text{se } \|\mathbf{x}\| \neq 0 \\ 0, & \text{se } \|\mathbf{x}\| = 0 \end{cases}$$

ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ indica un vettore e $\|\mathbf{x}\|$ la sua norma euclidea.

- Si disegni il profilo di f ;
- si calcolino $\nabla f(\mathbf{x})$ e $D_v f(\mathbf{x})$, dove v è la direzione individuata dal vettore $(1, 1, \dots, 1)$;
- si disegnino le curve di livello per $n = 2$ e $n = 3$;
- si scriva la formula di Taylor di f centrata in $(2, 0, \dots, 0)$, arrestata al secondo ordine. Nello stesso punto si scriva l'equazione del piano tangente.

3. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Si calcolino le derivate $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. [$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$.]

4. Delle funzioni di seguito indicate, si scrivano i polinomi di Mc Laurin arrestati al secondo ordine:

$$\begin{array}{ll} f_1(x, y) = \log(3 + x^2 - y) & f_2(x, y) = e^{x^2 + 2y^2} - 1 \\ f_3(x, y) = xy + x^2 + y & f_4(x, y) = \frac{x^2}{y + 1} \\ f_5(x, y) = \sin(xy) & f_6(x, y) = \sin(x) \cos(xy) \\ f_7(x, y, z) = xe^z - ye^x + z & f_8(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2 + z^2) - \log(1 - x^2 - y^2) \end{array}$$

5. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 e^{-\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

- Si calcolino $\nabla f(1, 0, 1)$ e $D_v f(1, 0, 1)$, dove v è la direzione individuata dal vettore $(1, 1, 1/2)$;
- si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(0, 0, 0, 0)$.

6. Delle funzioni di seguito indicate, si scrivano i polinomi di Taylor arrestati al secondo ordine nel punto indicato:

$$\begin{array}{ll} f_1(x, y) = \log(3 + x^2 - y) & (x_0, y_0) = (1, 3) \\ f_2(x, y) = xy^2 + x^2 + \sqrt[3]{y} & (x_0, y_0) = (1, -1) \\ f_3(x, y, z) = xe^z - ye^x + z & (x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1) \end{array}$$

7. Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $n \geq 2$, definita da

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^2 e^{-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}} & \text{se } \|\mathbf{x}\| \neq 0 \\ 0, & \text{se } \|\mathbf{x}\| = 0 \end{cases}$$

ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ indica un vettore e $\|\mathbf{x}\|$ la sua norma euclidea.

- Si disegni il profilo di f e, per $n = 2$, il grafico di f ;
- si calcolino $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ e $D_v f(\mathbf{x}_0)$, dove \mathbf{v} è la direzione individuata dal vettore $\mathbf{v} = (1, 1, \dots, 1)$ e $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$.
- si scriva la formula di Taylor di f centrata in \mathbf{x}_0 , arrestata al secondo ordine. Nello stesso punto si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f .

8. Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $n \geq 2$, definita da

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \left(1 - e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{|x_1|}} \right) & \text{se } x_1 \neq 0 \\ 0, & \text{se } x_1 = 0 \end{cases}$$

ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ indica un vettore e $\|\mathbf{x}\|$ la sua norma euclidea.

- Si studi la continuità di f nell'origine;
- si calcolino $\nabla f(\mathbf{0})$ e $D_v f(\mathbf{0})$, per ogni \mathbf{v} ;
- si studi la differenziabilità di f nell'origine.

4.1 Funzioni convesse

1. Delle funzioni di seguito indicate, si determinino i valori del parametro α per cui f é convessa o concava nel suo dominio:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 + y^2 - \alpha \log(x^2 y^2) & f_2(x, y) &= e^{\alpha x^2 + 2y^2} - 1 \\ f_3(x, y) &= \alpha xy - x^2 + y & f_4(x, y) &= x^4 - \alpha y^2 \\ f_5(x, y, z) &= (x-2)^2 + (z+2)^2 + (y+\alpha)^4 & f_6(x, y) &= \alpha \|(x, y)\|_1 \\ f_7(x, y, z) &= -x^2 - 4xy + \alpha^2 z^2 + \alpha x + 2\alpha xz - z^2 \end{aligned}$$

- 2.* Sia $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ una norma. Si pongano condizioni su tale norma affinché la funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, definita da $f(\mathbf{x}) = e^{\|\mathbf{x}\|}$, sia una funzione convessa.
- 3.* Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = -2x^{10} - x^2 e^{-y^2} - y^8 + 1$; si determinino tutti i valori della costante α per cui si ha

$$f(x, y) - f(0, 1) - \alpha y + \alpha \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

[$\alpha = -8$.]

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \int_0^{x^2+y^4} e^{t^2} dt$. E' convessa ?

4.2 Matrice Jacobiana

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) = \left(\int_0^{x+y^4} e^t dt, xy, 2xy^3 \right)$. Si calcoli la sua matrice jacobiana.
2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^4 e^{x^2+y}$. Si calcoli la matrice jacobiana di $\nabla f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
3. Si stabilisca se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = ((x+y^2)e^{-y^2-x}, (x^2+y)e^{-y^2-x})$$

è invertibile in un intorno di $(1/2, -1/2)$.

4. Si verifichi che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = \left(\int_{x^2}^{y^2} e^{t^2} dt, \int_x^y e^{t^4} dt \right)$$

è localmente invertibile in $(1, 0)$. Si calcoli la matrice Jacobiana di f^{-1} in $\left(-\int_0^1 e^{t^2} dt, -\int_0^1 e^{t^4} dt \right)$.

5. Si stabilisca in quali punti del tipo $(x_0, y_0, 0)$ la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, t) = (x^2 y^2, x^2 + t x^2, x^2 + y t)$$

è localmente invertibile. Sia inoltre $\mathbf{z}_0 = f(1, 2, 0)$; si calcoli la matrice Jacobiana di f^{-1} in \mathbf{z}_0 .