Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano – Bicocca

**Esercizi: estremi liberi e vincolati per funzioni in piú variabili.**

Versione del 13 giugno 2022

---

# Indice



Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).
Gli esercizi con "*" sono piú difficili degli altri !

---

# 1 Estremi liberi

1. Si determinino gli eventuali estremi di $f(x,y) = x^4y - xy^4 + 3$ nel suo dominio.

[$\nexists$.]

2. Si determinino gli eventuali estremi di $f(x,y) = \sqrt[21]{y^4 + x^3 - 3x^2 - 4y^2}$ nel suo dominio.

[min $(2, \pm\sqrt{2})$, max $(0,0)$.]

3. Si stabilisca se l'origine é estremo locale per $f(x,y) = y^8 - y^4x^6 + x^4$. Si determinino inoltre

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \qquad\qquad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$$

4. Si determinino estremi locali e globali, estremo superiore ed inferiore di

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 3xz + 8y + 1$$

[min globale $(0,-2,0)$, sup $\infty$.]

5. Si determinino, nel dominio, estremi locali e globali di

$$f(x,y) = x^{2x} + (2y)^y$$

[min globale $(1/e, 1/(2e))$.]

6. Si determinino estremi locali e globali di

$$f(x,y,z) = 3 + e^{xy^2z^3+8}$$

[max locali $(x_0,0,z_0)$ con $x_0z_0 < 0$, min locali $(x_0,0,z_0)$ con $x_0z_0 > 0$.]

7.* Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione

$$f(x,y) = \log(1 - x + y) + x - \sqrt{|y|}$$

[max locale $(0,0)$, sup $\infty$, inf $-\infty$.]

8. Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione
$$f(x,y) = (xy - x^2)e^{-x-y}$$
*[max locale $(1/2, 3/2)$, sup $\infty$, inf $-\infty$.]*

9. Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione
$$f(x,y) = e^{x^2-y^2} + x^2 + y^2 + \log(1 + x^2 + |y|)$$
*[min $(0,0)$, sup $\infty$.]*

10. Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione
$$f(x,y) = -e^{x^4+y^2} + x^2 + y^2 + 1$$

11. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(\mathbf{x}) = \int_0^{\|\mathbf{x}\|(\|\mathbf{x}\|-1)(\|\mathbf{x}\|-4)} \frac{3}{1 + \arctan^2 t}\,\mathrm{d}t$$
ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_2)$. Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione $f$.

12. Sia
$$f(x,y) = \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2}$$
Determinare i punti di massimo e minimo locali/globali e gli estremi superiori ed inferiori della funzione $f$ nel suo dominio.

13. Sia $f(x,y) = \log(x^2+1+y^4) - e^{x^4+y^2} - x^2 + y^2 + x^2y^2$. Si stabilisca se il punto $(0,0)$ é massimo o minimo locale per $f$.
*[$(0,0)$ sella.]*

14. Sia $f(x,y) = y^2 + 3x^4 - 4x^2y$. Si stabilisca se il punto $(0,0)$ é massimo o minimo locale per $f$.
*[$(0,0)$ sella.]*

15. Si stabilisca se la funzione $f(x,y) = x^4 + \frac{1}{4}y^4 + 4xy^3 + 4x^2y^2$ ammette massimo e minimo relativo nell'origine.
*[$(0,0)$ sella.]*

## 1.1 Ottimizzazione libera concava/convessa

1. Si determini massimi e minimi assoluti e relativi delle seguenti funzioni:
    1. $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2 + xy + 3x - y + 1$;
    2. $f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 3xy$;
    3. $f(x,y) = x + 2y - 3x^4 - y^4$;
    4. $f(x,y) = e^{x-y}$;
    5. $f(x,y) = \log(x+y)$;
    6. $f(x,y) = (e^x + e^y)^3$;
    7. $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^4$;
    8. $f(x,y) = x - x^2 - 3y^2$;
    9. $f(x,y) = e^{2x-x^2-y^2}$;
    10. $f(x,y) = 3xy - 2x^2 - 3y^2 + y - 1$;
    11. $f(x,y) = \arctan(x^4 + y^4)$;

# 2 Estremi vincolati

## 2.1 Metodi differenziali

1. Si determinino gli eventuali estremi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^5y^2}{(x^4+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| \leq 1, \; |y| \leq 2\}$.

*[*$\min\,(-1,1), \; (-1,-1); \; \max\,(1,1), \; (1,-1).$*]*

2. Sia

$$f(x,y) = xye^{\frac{xy}{x^2+y^2}}.$$

Si stabilisca se $f$ sia limitata su $\mathbb{R}^2$. Si determinino i punti di massimo e di minimo in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| + |y| \leq 1\}$.

*[No;* $\min\,(-1/2, 1/2), \; \max\,(1/2, 1/2).$*]*

3. Si determinino gli estremi della funzione

$$f(x,y) = \log(1 + x^4 + y^2)$$

vincolati alla curva di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

*[*$\min\,(\pm 1, 0), \; \max \; \nexists.$*]*

4. Si determinino punti di massimo e di minimo locali/globali, estremo superiore ed inferiore della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$$

vincolata alla curva di equazione $xy^2 = 1$. *[*$\max \text{ locale } (8/3)^{2/3}, (3/8)^{1/3}), \; \sup \infty, \; \inf 0.$*]*

## 2.2 Metodo delle curve di livello

1. Sia $f(x,y) = \log\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$. Si determini il massimo e il minimo di $f$ in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Sia $f(x,y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo $x - 2y - 4 = 0$. Si determinino gli estremi.

*[*$\min\,(4/5, -8/5), \; \max \; \nexists.$*]*

3. Sia $f(x,y) = \sqrt[4]{9 - x^2 - y^2}$. Si determini il massimo e il minimo di $f$ in $Q = [0,1] \times [0,1]$.

4. Sia $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$. Si determini il massimo e il minimo di $f$ in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5.* Sia $z = f(x,y)$ la funzione definita da $z \geq 0, \; x^2 + (y-z)^2 = 2z^2$. Si determini il massimo e il minimo di $f$ in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

6. Sia $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 8$. Si determinino gli estremi.

*[*$\min\,(2,2), \; \max\,(-2,-2).$*]*

7. Si determinino eventuale massimi e minimi di

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 - e^{x^2+y^2}$$

in $D = [0,1] \times [0,1]$.

8. Sia $f(x,y) = -x^2 + y$ soggetta al vincolo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x + y - 1 \leq 0\}$$

Si determinino gli estremi di $f$ in $D$.

*[*$\min(1,0), \; \max(0,1).$*]*

9. Si determini il massimo di $f(x,y) = 6x + 4y - 10$ soggetta al vincolo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x + 1 \geq 0, \; y - 4 \geq 0, \; xy + 3y - 12 \leq 0\}$$

*[*$\max(-1,6).$*]*

10. Si determini il massimo di $f(x,y) = -x + y$ soggetta al vincolo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2 \leq x \leq 3, \; x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 \leq 0\}$$

*[*$\max(2,4).$*]*

## 2.3 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Gli esercizi di seguito possono richiedere l'uso della tecnica dei "moltiplicatori di Lagrange".

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x,y) = (x+y)e^{-y^2-x}$.

   a. Si determinino gli eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $f$ in

   $$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\right\}.$$

   b. Determinare, se esistono, la retta tangente alla curva di livello passante per il punto $(1/2, 1/2)$ e la retta tangente alla curva di livello passante per $(2,1)$.

   *[a.* $\max(1/2, 1/2).$*]*

2. Determinare il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x,y) = x^2 + 3y$ soggetta al vincolo

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

3. Determinare il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x,y) = xy$ soggetta al vincolo

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

*[*$\max(1,1)$ *e* $(-1,-1)$; $\min(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ *e* $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$*]*

4. Si trovino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y,z) = x^3 + 2x + 2z$$

vincolata all'insieme $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - z = 0, \; z - 2 + x = 0\right\}$.

5. Determinare il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x,y) = xy$ soggetta al vincolo

$$x^2 + 2x + y^2 + 2y = 4.$$

6. Determinare il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x,y,z) = 2x - y + z$ soggetta al vincolo

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

7. Determinare il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x,y,z) = 2x+2y+z^2$ soggetta al vincolo
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$
[max $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$; min $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.]

8.* Si determinino, se esistono, massimi e minimi assoluti e relativi della funzione $f(x,y) = x^2$ vincolata da
$$xe^x + ye^y = 10.$$
[max relativo $(\alpha, -1)$, con $\alpha e^\alpha = 10 + 1/e$; min assoluto $(0,0)$.]

9. Si determinino massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = -x^2 e^{x^4}$ vincolata da
$$-x^2/2 - xy - x - y^2 = 0.$$
[max $(0,0)$; min $(-4-2)$.]

10. Si determinino massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = e^x + e^y$ vincolata da
$$x^2 + y^2 = 1.$$

11. Si determinino massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = y^2 - x^2$ vincolata in
$$x^2 + (y+1)^2 \leq 1.$$
[max $(0,-2)$; min $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2)$.]

## 2.4 Vari

1. Si provi che
$$x^3 + y^3 - 3axy \geq -a^3$$
per ogni $x \geq 0,\ y \geq 0,\ a \geq 0$.

2. Si determini estremo superiore ed estremo inferiore di
$$f(x,y) = \sqrt{|x+y|}\, e^{-x^2-y^2}$$
in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 + 4y^2 \leq 1\}$. [ sup $(2e)^{-1/4}$, min 0.]

3. Sia
$$f(x,y) = \int_x^y e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$$
e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq y \leq 2x\}$. Si determinino eventuale massimi e minimi di $f$ in $D$.
[min $(x,x)$ per $x \geq 0$, max $(\sqrt{(\log 2)/3}, 2\sqrt{(\log 2)/3})$.]

4. Sia
$$f(x,y) = \log(1+xy) + y^2 - 1$$
e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x+2y)^2 - 4 \leq 0,\ 2xy + 1 \geq 0\}$. Si determinino eventuali punti di massimo e minimo di $f$ in $D$.
[min $(-1-\sqrt{2}, (\sqrt{2}-1)/2)$ e $(1+\sqrt{2}, (-\sqrt{2}+1)/2)$ : max $(0,1)$ e $(0,-1)$.]

5. Si determinino gli eventuali estremi di
$$f(x,y) = (3x^2 + 2y^2 - x|x| + 2)^{3/5}$$
nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| \leq 1\}$.
[min $(0,0)$, max $(-1,0)$.]

6. Si determinino gli eventuali estremi di
$$f(x,y) = |x| + |y| - |xy|$$
nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2\}$.

7. Determinare eventuali estremi della funzione
$$f(x,y,z) = (x-1)e^x + y^2 + z^2 + 2z$$
soggetta al vincolo $x + y + z = 1$.

[min $(\alpha, 1 - \alpha/2, -\alpha/2)$, con $\alpha \in (0,1) : \ e^\alpha = 2/\alpha - 1$.]

8. Determinare massimi e minimi assoluti e relativi, estremo superiore e inferiore della funzione
$$f(x,y) = xe^{-\sqrt{4y^2+2x^2-4}}$$
soggetta al vincolo $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

[min assoluto $(-1, \pm\sqrt{3}/2)$, min relativo $(2,0)$, max assoluto $(1, \pm\sqrt{3}/2)$, max relativo $(-2,0)$.]

9. Sia la funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Determinare
   *a.* se esistono estremi relativi di $f$ nel suo dominio;
   *b.* se esistono estremi relativi di $f$ in
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq 2x \leq 1, \ |y| \leq x^2\}.$$

[*a.* min relativi $(1,1)$, e $(-1,-1)$. *b.* min $(1/2, 1/4)$, max $(1/2, -1/4)$.]

10. Determinare massimi e minimi assoluti e relativi, estremo superiore e inferiore della funzione
$$f(x,y) = [(x+1)^2 - (y-1)^2 - 2x + 1] \log y$$
soggetta al vincolo $y^2 - x^2 = 1$.

[min assoluto $(0,1)$, sup $\infty$].

11. Sia la funzione
$$f(x,y) = \sqrt{xy(x - y^2 + 3)}$$
Determinare massimi e minimi assoluti e relativi, estremo superiore e inferiore della funzione $f$ nel suo dominio.

12. Si consideri la funzione $f(x,y) = (x+y)e^{-y^2-x}$.
   *a.* Si determinino gli eventuali massimi e minimi locali della funzione $f$ in
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\};$$
   *b.* si determinino i massimi e minimi locali della funzione $f$ in
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}.$$

[*a.* max relativo $(1/2, 1/2)$. *b.* min relativo $(0,1)$ e $(-1,0)$, max relativo $(1/2,1/2)$ e $(-1+\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$.]

13. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} \displaystyle\int_0^{xy} \frac{e^t - 1}{t} \, \mathrm{d}t & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
Determinare i punti di massimo e di minimi assoluti di $f$ in
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}.$$

[I punti di max non esistono; i punti di min coincidono con $\partial C$.]

14. Si determinino i punti della superficie $z^2 - xy - 1 = 0$ piú vicini all'origine.

15. Si determinino i punti della linea
$$\begin{cases} z = 1 - xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
piú vicini e piú distanti dall'origine.
[I punti di max distanza sono $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2, 1/2)$; i punti di min distanza sono $(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2, 1/2)$.]

16. Si determinino massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y$ vincolata a
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

17. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x, y) = (x - y)e^{xy}.$$
   *a.* Si determinino estremo superiore, estremo inferiore, eventuali massimi e minimi locali e globali di $f$ in $\mathbb{R}^2$;
   *b.* determinare il valore massimo e il valore minimi assunto da $f$ in
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0, \; xy \leq -1, \; y \leq -x, \; y \geq -2\};$$
[*a.* sup $+\infty$, inf $-\infty$, $\nexists$ max $-$ min. *b.* min $4e^{-4}$, max $5/(2e)$.]

18. Sia
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - 2x + y^2 + 2|y| \leq 0\}$$
e siano $f$, $g$ due funzioni definite da
$$f(x, y) = e^{|y| - |x| + 1}, \qquad g(x, y) = |x| + |y|$$
Si determinino, se esistono, i valori massimi e minimi assunti dalle due funzioni in $D$.
[$\max f = e$, $\min f = 1/e$; $\max g = 2$, $\min g = 0$.]

19.* Si determinino eventuali punti di massimo e minimo globale della funzione
$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \log\left(\frac{5}{4}y^2 + x^2 - 4x + 4\right)$$
in
$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x - 2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1\right\}.$$
[$\max(2, 2)$, $\min(2, -2)$.]

20. Si determinino eventuali punti di massimo e minimo globale della funzione
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$$
in
$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : \; 4x^2 + 4y^2 \leq 1\right\}.$$
[$\max(0, 0)$, $\min(1/(2\sqrt{2}), 1/(2\sqrt{2}))$.]

21. Si determinino il sup e l'inf della funzione
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 2.$$
[$\sup f = +\infty$, $\min f = -6$.]