

Indice

1	Successioni di funzioni	1
2	Serie di funzioni	4
3	Serie di potenze	9

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).

Gli esercizi con “*” sono piú difficili degli altri !

Gli esercizi indicati con “S” sono svolti in “*Esercizi svolti sulla convergenza puntuale e uniforme*” disponibile sulla pagina del corso.

1 Successioni di funzioni

1.^S Data una successione $\{a_n\}_{n>0}$ di numeri reali, si consideri la funzione f_n , definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} na_n x & \text{se } 0 < x \leq 1/n \\ a_n(2 - nx) & \text{se } 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$.

2.^S Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali non negativi, si consideri la successione $\{f_n\}$ definita da $f_n(x) = x^n e^{-a_n x}$. Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$ in $[0, \infty)$ nei seguenti casi:

- $a_n = n$,
- $a_n = \sqrt{n}$,
- $a_n = n^2$,
- $a_n = 1/n$.

3.^S Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali, si consideri la funzione f_n definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n(1 - nx) & \text{se } 0 \leq x < 1/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$ e si stabilisca se la convergenza è uniforme in \mathbb{R} in ciascuno dei seguenti casi:

- $a_n = 1/n$;
- $\{a_n\}$ successione qualsiasi.

4.^S Si studino le convergenze puntuale e uniforme in \mathbb{R} della successione $\{f_n\}$, definita da

$$f_n(x) = \arctan(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- 5.^S Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali positivi, si consideri la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = a_n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$ in ciascuno dei seguenti casi:

- $a_n = n^\alpha$, con α reale positivo;
- $a_n = 1/\sqrt{n}$.

- 6.^S Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali, si consideri la funzione f_n definita da

$$f_n(x) = a_n \mathbf{1}_{[n, n+1)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^+ .

- 7.^S Data la successione $\{f_n\}$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n(x+1)}{n+1} & \text{se } -1 < x < 1/n \\ \frac{n-nx+2}{n+1} & \text{se } 1/n \leq x < 1+2/n \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

se ne studino le convergenze puntuale e uniforme in \mathbb{R} .

- 8.^S Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali, si consideri la funzione f_n definita da

$$f_n(x) = e^{-(x-a_n)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$ nei seguenti casi:

- $a_n = (-1)^{n^2}$,
- $a_n = n$,
- $a_n = 1/n$.

- 9.^S Si consideri la funzione f_n definita da

$$f_n(x) = e^{-(x-1/n)^2} \cos\left(e^{(x-1/n)^2}\right).$$

- Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$. Si verifichi che $\{f_n\}$ converge uniformemente in ogni compatto K .
- Si studi la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in \mathbb{R} .

10. Sia

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si dimostri che $\{f_n\}$ converge uniformemente in \mathbb{R} a una funzione f e che l'equazione

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

vale se $x \neq 0$, ma non se $x = 0$.

11. Si consideri

$$f_n(x) = x^{n-x/n} \quad \forall x \in (0, 1).$$

È vera la relazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx ?$$

[Si.]

12. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^e (\log x)^n dx \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^3 (\log x)^n dx. \quad [0, \infty.]$$

13. Data la funzione

$$f_n(x) = e^{nx} |x|^{1/n} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

- si determini l'insieme E di convergenza semplice della successione $\{f_n\}$ e si calcoli la funzione limite;
- si determinino i sottoinsiemi di E in cui la convergenza di $\{f_n\}$ è uniforme.

[a. $E = (-\infty, 0]$, $f(x) = 0$. b. $(-\infty, a]$ con $a < 0$ fissato.]

14. Si consideri

$$f_n(x) = \int_n^{nx} t^{1/3} e^{-t} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Si determini l'insieme E di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e la funzione limite f .
- Si stabilisca se la convergenza è uniforme in E .

[a. $E = [0, \infty)$, $f(x) = c \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$ con c costante negativa. b. No.]

15. Data la funzione

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n} x^{n-1}}{1+x^n} \quad \forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

- si calcoli il $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ e si stabilisca in quali intervalli del tipo $[0, a]$ la convergenza di $\{f_n\}$ è uniforme;

- si stabilisca se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

[a. $f(x) = \infty \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$; $0 < a < 1$ fissato. b. Sì.]

16. Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f_{n,a}$ la funzione definita da

$$f_{n,a}(x) = n^a x (1-x^2)^n.$$

- Si determini l'insieme E_a di convergenza semplice di $\{f_{n,a}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e si calcoli la funzione limite;
- si stabilisca se la convergenza è uniforme in E_a .

[a. $E_a = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ se $a < 0$; $E_a = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se $a \geq 0$; $f(x) = 0$. b. Sì per $a < 0$.]

17. Data la funzione

$$f_n(x) = \frac{(x-1)^n}{1+x^n} \arctan(n^{x-1})$$

- determinare l'insieme E di convergenza semplice della successione $\{f_n\}$ e si calcoli la funzione limite;
- determinare i sottoinsiemi di E in cui la convergenza di $\{f_n\}$ è uniforme.

18. Per ogni a in \mathbb{R}^+ ed n in \mathbb{N} , si consideri la funzione

$$f_{n,a}(x) = \frac{n^a x^{n-3/2}}{1+x^n} \quad \forall x \in (0, 1).$$

- si determini l'insieme E in cui $\{f_{n,a}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge semplicemente e si calcoli la funzione limite;

- b. si determinino i sottoinsiemi di E in cui la convergenza di $\{f_{n,a}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è uniforme;
 c. si stabilisca per quali valori di a vale la relazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{n,a}(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,a}(x) \, dx$$

19. Per ogni intero positivo n si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f_n(x) = n x e^{-\sqrt{n}x}.$$

- a. Si disegnino i grafici delle funzioni f_n e si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$ in $[0, \infty)$;
 b. in quali sottoinsiemi di $[0, \infty)$ la convergenza di $\{f_n\}$ è uniforme?
 c. Si calcolino i limiti seguenti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\pi f_n(x) e^{-x^2} \, dx \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) e^{-x^2} \, dx.$$

20. Per ogni intero positivo n si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^n}{1+(x-1)^n}.$$

- a. Si determini l'insieme di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$.
 b. Si studi la convergenza uniforme di $\{f_n\}$.

21. Per ogni intero positivo n si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{n+|x|} \log(n+|x|).$$

- a. Si determini l'insieme di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$.
 b. Si studi la convergenza uniforme di $\{f_n\}$.

22. Sia $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^n}{(x-1)^n + (x+1)^n}.$$

- a. Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
 b. Si studi la convergenza uniforme di $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

23. Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2} \, dy.$$

Dopo aver verificato che le f_n sono continue, si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e di convergenza uniforme di $\{f_n\}$.

2 Serie di funzioni

- 1.^S Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ come nell'Esercizio 1.1.1. Si studino le convergenze puntuale e uniforme della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nei seguenti casi:
- a. $a_n = 1/n^2$;

- b. $a_n = 1/n$;
- c. $a_n = (-1)^n/n$.

2.^S Sia f_n la funzione definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x. \end{cases}$$

- a. Si determini l'insieme E di convergenza puntuale della serie $\sum_n f_n$ e si mostri che la sua somma è continua in E ;
- b. si mostri che $\sum f_n$ non converge uniformemente in E .

3.^S Si studino le convergenze puntuale, assoluta e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}.$$

4.^S Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n,$$

- a. si determini l'insieme dei punti dove converge;
- b. si stabilisca se la convergenza è uniforme in $[0, \pi/4]$;
- c. si calcoli $\int_0^{\pi/4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n \right) dx$.

5.^S Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- a. Si determini l'insieme $E \subset \mathbb{R}$ in cui essa converge puntualmente, e si indichi con $f(x)$ la sua somma.
- b. Si verifichi che la serie converge uniformemente in $[a, 2]$, per ogni $a \in (0, 1)$.
- c. Si calcoli $f(3/2)$ con un errore inferiore a 10^{-2} .

6.^S Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{x^{2n} + n^a} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

si stabilisca per quali valori di a essa

- a. converge puntualmente in $|x| < 1$;
- b. converge puntualmente in $|x| > 1$;
- c. converge puntualmente in \mathbb{R} ;
- d. converge uniformemente in $[-1, 1]$, dopo aver dimostrato che converge uniformemente in \mathbb{R} se $a > 2$.

7.^S Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si determinino, in dipendenza del parametro reale α ,

- a. l'insieme di convergenza puntuale;
- b.* l'insieme di convergenza uniforme.
- c. Indicata con $f(x)$ la somma della serie nell'insieme di convergenza puntuale, si calcoli, quando esiste, il valore del $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

8.^S Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- a. Si dimostri che essa converge semplicemente in \mathbb{R} ;
- b. si stabilisca se la convergenza è uniforme nell'intervallo $[0, \pi]$;
- c.* si stabilisca se la convergenza è uniforme nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

9. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n) x^n,$$

si determini l'insieme E sui cui si ha convergenza semplice. In quali sottoinsiemi di E la convergenza è uniforme?

10. Si determini l'insieme di convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + n}{n^2 x^4 + n^4 + 1},$$

e si stabilisca se la convergenza è ivi uniforme.

[\mathbb{R} ; si.]

11. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n + n^x},$$

con x opportunamente scelto.

- a. Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme per $x \geq 0$;
- b.* si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme nel dominio della serie di funzioni.

[a. $[0, 1) \cup (1, \infty)$; $[0, a] \cup [b, \infty)$ con $0 < a < 1 < b$ fissati.]

12. Si studino le convergenze puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/n} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n.$$

13. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)^n} \quad \forall x \in [0, \infty) \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

- a. se ne determinino l'insieme E_a di convergenza semplice e la funzione somma;
- b. si descrivano i sottoinsiemi di E_a in cui la convergenza è uniforme.

[a. $E_a = [0, \infty) \forall a > 0$. b. Per $a \in (0, 2]$ conv.unif. in $[b, \infty)$ con $0 < b$ fissato; per $a > 2$ conv.unif. in E_a .]

14. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali distinti, con $-\infty < a \leq x_n \leq b < \infty$. Supponiamo che $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia una successione di numeri reali tali che $\sum |c_n| < \infty$. Si dimostri che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x - x_n) \quad \forall x \in [a, b]$$

converge uniformemente in $[a, b]$ e che la sua somma è continua in ogni punto di $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$.

15. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}$$

nel suo insieme di definizione.

- Si studi la convergenza puntuale;
- su quali intervalli di \mathbb{R}^+ la serie converge uniformemente?
- * Su quali intervalli di \mathbb{R} la serie converge uniformemente?

[a. $\mathbb{R} \setminus (\cup_{n=1}^{\infty} \{-1/n^2\})$. b. $[a, \infty)$ con $0 < a$ fissato.]

16. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{x + e^{-nx}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

- se ne determini l'insieme E di convergenza semplice;
- si descrivano i sottoinsiemi di E in cui la convergenza è uniforme.

[a. $E = (-\infty, 0]$. b. $(-\infty, 0]$.]

17. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^a + n^a} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

- se ne determini l'insieme E_a di convergenza semplice;
- si descrivano i sottoinsiemi di E_a in cui la convergenza è uniforme.

18. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

Si calcoli la somma della serie.

[Conv.punt. in $E = (-\infty, -2) \cup [0, \infty)$; conv.unif. in $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$ con $a < -2$ e $0 < b$ fissati.]

19. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$$

- se ne determini l'insieme di convergenza puntuale;
- si verifichi che si ha convergenza uniforme su ogni compatto.

[a. \mathbb{R} .]

20. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{nx^3}$$

- se ne determini l'insieme di convergenza puntuale e si calcoli la somma;

b. si stabilisca se su tale insieme la convergenza sia uniforme.

[a. $(-\infty, 0]$. b. No.]

21. Si studi la convergenza uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \log \left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}} \right).$$

[$[-a, a]$ con $0 < a < 1$ fissato.]

22. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}$$

in \mathbb{R}^+ .

23. Si consideri

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n \arctan x^{n^3}.$$

Si determini l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme della serie di funzioni.

24. Si determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme delle serie seguenti:

<p>a. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$</p>	<p>b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^{n+1}}{e^{nx^2}}$</p>
<p>c. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{x}{n^2} \right)$</p>	<p>d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(n-1)!}$</p>
<p>e. $\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$</p>	<p>f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx^2}}$</p>
<p>g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2}$</p>	<p>h. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \log \left(\frac{x^n}{n(n-1)^2} \right)$</p>
<p>i. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) \right)^n$</p>	<p>l. $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(nx) - \arctan((n-1)x))$</p>
<p>m. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^x - 2)^n}{n + n^x}$</p>	<p>n. $\sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n \log(1+n^x)$</p>
<p>o. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + n}{1+n^2}$</p>	<p>p. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 e^n + e^{-nx}}$</p>
<p>q. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{x/n} - 1) \sin(x/n)$</p>	

25. Si studino, al variare del parametro reale positivo a , le convergenze semplice e uniforme delle serie seguenti in \mathbb{R}^+ :

<p>a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^a + n^2}$</p>	<p>b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^a}{x + n^2}$</p>
<p>c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^a + n}$</p>	<p>d. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x+n} \right)^a$</p>
<p>e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x^a + n)^a}$</p>	

3 Serie di potenze

1. Si mostri che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ ma non è sviluppabile in serie di McLaurin.

2. Si determinino il raggio di convergenza, l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme delle seguenti serie:

$$\begin{array}{ll} a.S & \sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^{-n} x^n \\ c. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \\ e. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{n} x^n \\ g. & \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^{n!} \\ b.S & \sum_{n=1}^{\infty} (\log(1+n))^{-1} x^n \\ d. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \\ f. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n \log n} x^n \\ h. & \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{2+n}}{n} x^{2n}. \end{array}$$

3. Si determini, in dipendenza dal parametro intero positivo k , il raggio di convergenza delle seguenti serie:

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^3} x^{n^k} \quad b. \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^{n^k}.$$

4. Si calcolino, con un errore inferiore a 10^{-2} , i seguenti integrali:

$$\begin{array}{ll} a.S & \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x} dx \\ c.S & \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2x} dx \\ e. & \int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x} dx \\ b. & \int_0^{1/2} \frac{\arctan x - \sin x}{x} dx \\ d. & \int_0^{1/4} \frac{\log(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x}}{x} dx \\ f. & \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx. \end{array}$$

5. Si determinino l'insieme di convergenza semplice, gli insiemi di convergenza uniforme e la somma delle seguenti serie:

$$\begin{array}{ll} a. & \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \\ c.S & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \\ e.S & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n-1)!} \\ g. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} \\ i. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{x^4 - 3x^2 + 1} \right)^n \\ m. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(n-1)!(n+3)} \\ b. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ d. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(n-1)!} \\ f. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n n!} \\ h. & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-e)^n \\ l. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{(x^2-3x+1)n} \\ n. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2^n}{n!} x^n. \end{array}$$

6. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1+(-1)^n}{(n+1)!} x^n.$$

- Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;
- si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$;
- si calcoli, con un errore inferiore a 10^{-3} , l'integrale

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

7. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n.$$

- Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;
- se ne calcoli la somma;
- si calcoli, con un errore inferiore a 10^{-3} , l'integrale

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

8. Si calcoli, con un errore inferiore a 10^{-2} , l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x - x}{x^3} dx.$$

9. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+1)}{n^2} x^n.$$

- Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;
- se ne calcoli la somma e la si indichi con $f(x)$;
- si calcoli, con un errore inferiore a 10^{-3} , l'integrale

$$\int_0^{1/2} f(x) dx.$$

$$[\text{b. } f(x) = \frac{d}{dx} \left(x \int_0^x \frac{\log(1+t)-t}{t} dt \right).]$$

10. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{(2n)! 2n} x^{2n}.$$

- Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;
- si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$;
- si calcoli, con un errore inferiore a 10^{-3} , l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{f(x)}{x} dx.$$

11. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)^2} x^n.$$

- a. Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;
b. se ne calcoli la somma e la si indichi con $f(x)$;
c. si calcoli, con un errore inferiore a 10^{-3} , l'integrale

$$\int_0^{1/2} f(x) dx.$$

$$[\text{b. } f(x) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x \frac{\log(1+t)-t}{t} dt \right).]$$