

*ESERCIZI SULLA CONVERGENZA PUNTUALE E  
UNIFORME*

*Andrea Calogero*

Dipartimento di Matematica e Applicazioni – Università di Milano-Bicocca

([andrea.calogero@unimib.it](mailto:andrea.calogero@unimib.it))

14 novembre 2019



# Indice

<b>1</b>	<b>Successioni di funzioni</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Serie di funzioni</b>	<b>15</b>
2.1	Serie di potenze . . . . .	25



# Capitolo 1

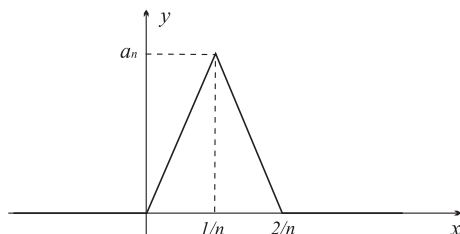
## Successioni di funzioni

**Esercizio 1.0.1.** Data una successione  $\{a_n\}_{n>0}$  di numeri reali, si consideri la funzione  $f_n$ , definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} na_n x & \text{se } 0 < x \leq 1/n \\ a_n(2 - nx) & \text{se } 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di  $\{f_n\}$ .

*Svolgimento* • Grafico di  $f_n$ . Se  $a_n > 0$ , il grafico di  $f_n$  è indicato in figura.



• *Convergenza puntuale.* Per ogni  $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$  la successione  $\{f_n(x)\}$  è identicamente nulla e quindi  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ .

Sia ora  $x \in (0, 1)$ : la successione  $\{f_n(x)\}$  è definitivamente nulla, cioè esiste un intero  $n_0(x) = n_0$  tale che, per ogni  $n > n_0$ , si ha  $f_n(x) = 0$  (nella fattispecie basta scegliere  $n_0 \geq 2/x$ ). Quindi  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ .

Riassumendo,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $\mathbb{R}$ .

• *Convergenza uniforme.* Ricordiamo che  $\{f_n\}$  converge uniformemente se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0|.$$

È facile verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|;$$

quindi  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  se e solo se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Si noti infine che, se  $\alpha > 0$ , allora

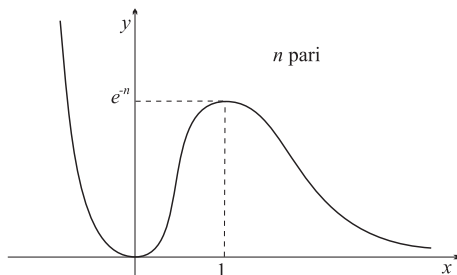
$$\sup_{x \in (-\infty, 0] \cup [\alpha, \infty)} |f_n(x) - 0| = 0 \quad n \geq 2/\alpha.$$

Perciò  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 in  $(-\infty, 0] \cup [\alpha, \infty)$ , indipendentemente dal comportamento del  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Esercizio 1.0.2.** Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali non negativi, si consideri la successione  $\{f_n\}$  definita da  $f_n(x) = x^n e^{-a_n x}$ . Si studino le convergenze puntuale e uniforme di  $\{f_n\}$  in  $[0, \infty)$  nei seguenti casi:

- $a_n = n$ ,
- $a_n = \sqrt{n}$ ,
- $a_n = n^2$ ,
- $a_n = 1/n$ .

Svolgimento di a. • Grafico di  $f_n$ .



- **Convergenza puntuale.** Osserviamo che se  $x \geq 0$  si ha  $0 \leq x e^{-x} < 1$  e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = 0.$$

Quindi,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $[0, \infty)$ .

- **Convergenza uniforme.** Osserviamo che

$$f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-nx}(1-x) :$$

ne deduciamo che 1 è il punto di massimo assoluto di  $f$ . Perciò

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x) - 0| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} f_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Abbiamo provato che  $f_n$  converge uniformemente a 0 in  $[0, \infty)$ .

Svolgimento di b. • **Convergenza puntuale.** Immediatamente abbiamo  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ . Sia  $x > 0$ , per le proprietà dei logaritmi abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-\sqrt{n}x} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log x - \sqrt{n}x} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \infty & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Quindi  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $[0, 1]$ .

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che

$$f'_n(x) = \sqrt{n}x^{n-1}e^{-\sqrt{n}x}(\sqrt{n} - x);$$

il punto di massimo è in  $\sqrt{n}$  e che in  $[0, 1]$  la funzione è crescente. Otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$$

quindi  $\{f_n\}$  converge uniformemente alla funzione nulla in  $[0, 1]$ .

*Svolgimento di c.* • *Convergenza puntuale.* Sia  $x > 0$ , otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-n^2 x} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log x - n^2 x} = 0$$

ed essendo  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ , possiamo concludere che  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $[0, \infty)$ .

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che il punto di massimo ora è  $1/n$  che, al crescere di  $n$ , si sposta verso l'origine. Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x) - 0| &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1/n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (en)^{-n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concludiamo che  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 in  $[0, \infty)$ .

*Svolgimento di d.* • *Convergenza puntuale.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-x/n} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \infty & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Quindi  $\{f_n\}$  converge puntualmente alla funzione  $\mathbf{1}_{\{1\}}$  in  $[0, 1]$ .

• *Convergenza uniforme.* Ricordiamo che la funzione limite di una successione di funzioni continue, uniformemente convergente nell'insieme  $E$  è continua in  $E$ .

Poiché  $f_n$  è continua in  $[0, 1]$  e  $\mathbf{1}_{\{1\}}$  non lo è,  $\{f_n\}$  non può convergere uniformemente a  $\mathbf{1}_{\{1\}}$  in  $[0, 1]$ .

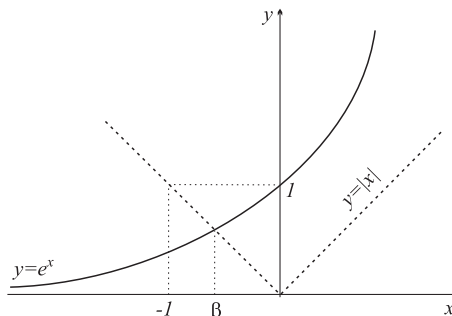
Studiamo la convergenza uniforme in  $[0, \alpha]$ , con  $0 < \alpha < 1$ . Essendo in tale intervallo  $e^{-x/n} \leq e^{\alpha/n}$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \alpha]} |f_n(x) - \mathbf{1}_{\{1\}}(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \alpha]} |x|^n e^{-x/n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha/n} \sup_{x \in [0, \alpha]} |x|^n \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha/n} \alpha^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 in  $[0, \alpha]$ .

**Osservazione.** L'esercizio 1.0.2 richiede una attenzione particolare se la convergenza puntuale e uniforme della successione  $\{f_n\}$  viene studiata in  $\mathbb{R}$ . Come esempio, studiamo la convergenza puntuale di  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$  nel caso a.

Per  $x < 0$  abbiamo  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|}{e^x}\right)^n$ . Con l'ausilio del seguente grafico osserviamo che  $|x|e^{-x} < 1$  se e solo se  $x > \beta$ , dove  $\beta$  è l'unica soluzione dell'equazione  $|x| = e^x$ .



Quindi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = \begin{cases} \beta & \text{se } x \leq \beta \\ 0 & \text{se } \beta < x \leq 0. \end{cases}$$

Allora  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $[\beta, 0]$ .

Invitiamo il lettore a completare lo svolgimento dell'esercizio nei quattro casi proposti.

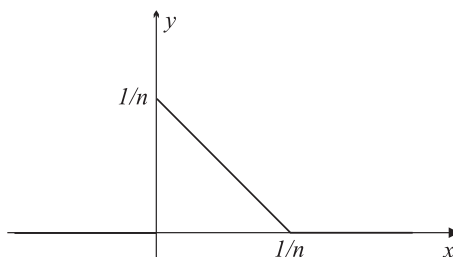
**Esercizio 1.0.3.** Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali, si consideri la funzione  $f_n$  definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n(1 - nx) & \text{se } 0 \leq x < 1/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si studi la convergenza puntuale di  $\{f_n\}$  e si stabilisca se la convergenza è uniforme in  $\mathbb{R}$  in ciascuno dei seguenti casi:

- $a_n = 1/n$ ;
- $\{a_n\}$  successione qualsiasi.

Svolgimento di a. • Grafico di  $f_n$ .



• **Convergenza puntuale.** Per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , la successione  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è definitivamente nulla. Infatti, se  $n \geq 1/x$ , allora  $f_n(x) = 0$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \\ &= 0. \end{aligned}$$



Quindi  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $\mathbb{R}$ .

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0.$$

Perciò  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 in  $\mathbb{R}$ .

*Svolgimento di b.* • *Convergenza puntuale.* Come in a.,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Se esiste finito il  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , che indicheremo con  $a$ , allora  $\{f_n\}$  converge puntualmente in 0 e quindi  $\{f_n\}$  converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  alla funzione  $a \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$ .

Se, invece, la successione  $\{a_n\}$  non ha limite o ha limite infinito, allora  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

• *Convergenza uniforme.* Supponiamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ , altrimenti su tutto  $\mathbb{R}$  non avremmo neanche la convergenza puntuale. Essendo  $\{f_n\}$  nulla in  $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ , per ogni  $n$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - a \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(x)| &= \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - a \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(x)| \\ &= \max \left( \sup_{x \in (0, 1]} |f_n(x)|, |a_n - a| \right) \\ &= \max(|a_n|, |a_n - a|). \end{aligned}$$

Quindi

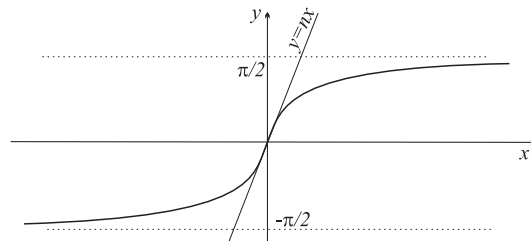
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - a \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max(|a_n|, |a_n - a|) \\ &= \max \left( \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| \right) \\ &= \max \left( \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|, 0 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|. \end{aligned}$$

Quindi  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  se e solo se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Esercizio 1.0.4.** Si studino le convergenze puntuale e uniforme in  $\mathbb{R}$  della successione  $\{f_n\}$ , definita da

$$f_n(x) = \arctan(nx) \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Svolgimento* • *Grafico di  $f_n$ .*



- *Convergenza puntuale.* Osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(nx) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \pi/2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quindi  $\{f_n\}$  converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  a  $f(x) = (\pi/2)(\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) - \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x))$ .

- *Convergenza uniforme.* Poiché  $\{f_n\}$  è una successione di funzioni continue e  $f$  non è continua in  $\mathbb{R}$ ,  $\{f_n\}$  non converge uniformemente a  $f$  in  $\mathbb{R}$ .

Studiamo la convergenza uniforme in  $[\alpha, \infty)$ , con  $\alpha > 0$ . Poiché  $(\pi/2) - \arctan(nx)$  è decrescente in  $[\alpha, \infty)$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\alpha, \infty)} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\alpha, \infty)} (\pi/2 - \arctan(nx)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi/2 - \arctan(n\alpha)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La simmetria delle funzioni in esame permette di concludere che  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  in  $(-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, \infty)$ , per ogni  $\alpha > 0$ .

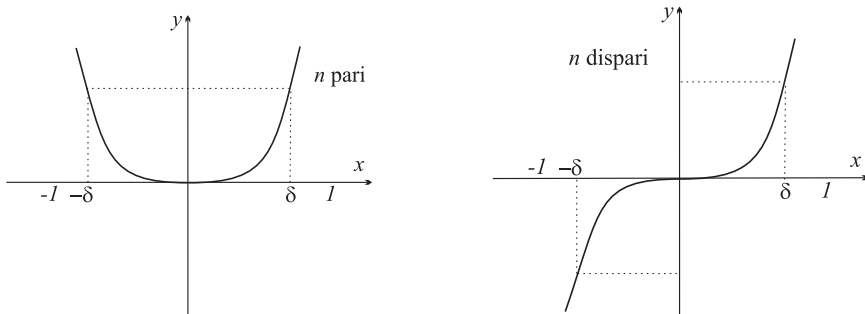
**Esercizio 1.0.5.** Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali positivi, si consideri la successione  $\{f_n\}$  definita da

$$f_n(x) = a_n x^n \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di  $\{f_n\}$  in ciascuno dei seguenti casi:

- $a_n = n^\alpha$ , con  $\alpha$  reale positivo;
- $a_n = 1/\sqrt{n}$ .

Svolgimento di a. • Grafico di  $f_n$ .



- *Convergenza puntuale.* Osserviamo che se  $x \leq -1$ , allora  $\{f_n(x)\}$  non ammette limite per  $n$  tendente a  $\infty$  e che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \infty & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Quindi  $\{f_n\}$  converge puntualmente in  $(-1, 1)$  alla funzione nulla.

• *Convergenza uniforme.* Studiamo la convergenza uniforme in  $[-\delta, \delta]$ , con  $0 < \delta < 1$ . È facile convincersi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-\delta, \delta]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \delta^n = 0.$$

Quindi  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $[-\delta, \delta]$  alla funzione nulla.

*Svolgimento di b.* • *Convergenza puntuale.* È facile verificare che  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge alla funzione nulla in  $[-1, 1]$ .

• *Convergenza uniforme.* Essendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/\sqrt{n}) = 0,$$

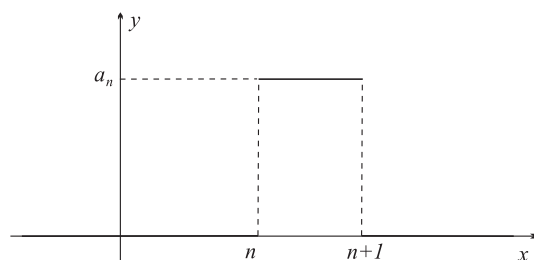
la convergenza è uniforme in  $[-1, 1]$ .

**Esercizio 1.0.6.** Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali, si consideri la funzione  $f_n$  definita da

$$f_n(x) = a_n \mathbf{1}_{[n, n+1)}(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme della successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^+$ .

*Svolgimento* • *Grafico di  $f_n$ .* Se  $a_n > 0$ , il grafico di  $f_n$  è quello indicato in figura.



• *Convergenza puntuale.* Sia  $x \in \mathbb{R}^+$ . Osserviamo che  $f_n(x) = 0$  per ogni  $n \geq \lfloor x \rfloor + 1$ . Quindi  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $\mathbb{R}^+$ .

• *Convergenza uniforme.* Mostriamo che, per ogni  $\alpha > 0$ ,  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $[0, \alpha]$ .

Infatti

$$\sup_{x \in [0, \alpha]} |f_n(x) - 0| = 0 \quad n \geq \lfloor \alpha \rfloor + 1.$$

Si osservi che  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $\mathbb{R}^+$  se e solo se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , perché

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x) - 0| = |a_n|.$$

**Esercizio 1.0.7.** Data la successione  $\{f_n\}$ , definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n(x+1)}{n+1} & \text{se } -1 < x < 1/n \\ \frac{n-nx+2}{n+1} & \text{se } 1/n \leq x < 1+2/n \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

se ne studino le convergenze puntuale e uniforme in  $\mathbb{R}$ .

Svolgimento • Grafico di  $f_n$ .

• *Convergenza puntuale.* Il grafico di  $f_n$  rappresenta un triangolo isoscele i cui vertici, al tendere di  $n$  all'infinito, si comportano nel seguente modo: uno rimane fisso in  $(-1, 0)$ , un altro si sposta lungo l'asse  $x$  verso  $(1, 0)$ , l'ultimo si sposta verso  $(1, 0)$  sulla retta  $y = 1$ . Quindi  $\{f_n\}$  converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 - x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Vediamo ora una dimostrazione piú analitica. Per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(x+1)}{n+1} \mathbf{1}_{(-1, 1/n)}(x) + \frac{n-nx+2}{n+1} \mathbf{1}_{[1/n, 1+2/n)}(x) \right) \\ &= (x+1) \mathbf{1}_{(-1, 0)}(x) + (1-x) \mathbf{1}_{[0, 1)}(x), \end{aligned}$$

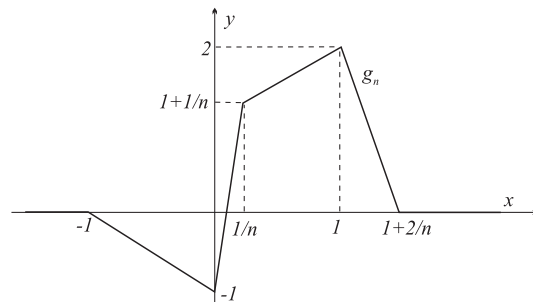
come richiesto.

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che se  $x < -1$ , allora  $\{f_n\}$  è definitivamente nulla in  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ . Ergo  $\{f_n\}$  converge ivi uniformemente a 0. Al fine di stabilire se  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  in  $\mathbb{R}$ , valutiamo  $f_n - f$ :

$$f_n(x) - f(x) = \left[ \frac{n(x+1)}{n+1} \mathbf{1}_{(-1, 0)}(x) + \frac{n(x+1)}{n+1} \mathbf{1}_{[0, 1/n)}(x) + \frac{n-nx+2}{n+1} \mathbf{1}_{[1/n, 1)}(x) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n - nx + 2}{n + 1} \mathbf{1}_{[1, 1+2/n)}(x) \Big] - \left[ (x + 1) \mathbf{1}_{(-1, 0)}(x) + (1 - x) \mathbf{1}_{[0, 1)}(x) \right] \\
= & \frac{1}{n + 1} \left[ -(x + 1) \mathbf{1}_{(-1, 0)}(x) + (2nx + x - 1) \mathbf{1}_{[0, 1/n)}(x) \right. \\
& \left. + (x + 1) \mathbf{1}_{[1/n, 1)}(x) + (n - nx + 2) \mathbf{1}_{[1, 1+2/n)}(x) \right].
\end{aligned}$$

Per ogni  $n$ , sia  $g_n$  la funzione tra le ultime parentesi quadre: il suo grafico è disegnato in figura.



Poiché

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_{\mathbb{R}} |g_n(x)|}{n + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n + 1} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

la successione  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  in  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 1.0.8.** Data una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali, si consideri la funzione  $f_n$  definita da

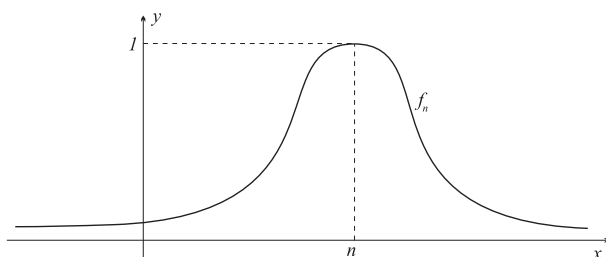
$$f_n(x) = e^{-(x-a_n)^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di  $\{f_n\}$  nei seguenti casi:

- $a_n = (-1)^{n^2}$ ,
- $a_n = n$ ,
- $a_n = 1/n$ .

*Svolgimento di a.* • **Convergenza puntuale.** Il  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(x-(-1)^{n^2})^2}$  esiste se e solo se  $x = 0$ . Quindi  $\{f_n\}$  converge puntualmente solo in 0; non è quindi interessante lo studio della convergenza uniforme.

*Svolgimento di b.* • **Grafico di  $f_n$ .** Si osservi che i grafici delle  $f_n$  si ottengono traslando il grafico di  $x \mapsto e^{-x^2}$  di  $n$  verso destra.



- *Convergenza puntuale.* Poiché  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(x-n)^2} = 0$ ,  $\{f_n\}$  converge puntualmente a 0 in  $\mathbb{R}$ .
- *Convergenza uniforme.* Osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{-(x-n)^2} = 1.$$

Quindi  $\{f_n\}$  non converge uniformemente a 0 in  $\mathbb{R}$ .

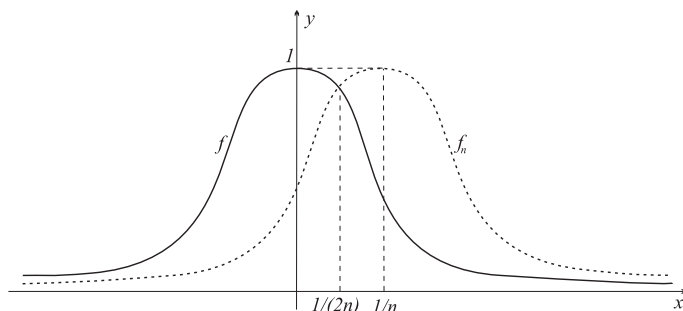
Mostriamo che  $\{f_n\}$  converge uniformemente a 0 in  $(-\infty, \alpha]$ , per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Notiamo che, per  $n > \alpha$ , i punti di massimo di  $f_n$  non appartengono a  $(-\infty, \alpha]$  e che  $f_n$  è ivi crescente. Quindi

$$\sup_{x \in (-\infty, \alpha]} |f_n(x) - 0| = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq \alpha \\ e^{-(\alpha-n)^2} & \text{se } n > \alpha, \end{cases}$$

da cui segue che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(-\infty, \alpha]} |f_n(x) - 0| = 0$ , come richiesto.

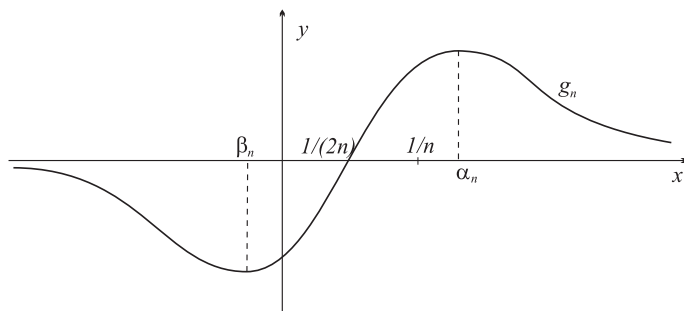
*Svolgimento di c.* • *Grafico di  $f_n$ .*



- *Convergenza puntuale.* La successione  $\{f_n(x)\}$  converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  alla funzione  $f(x) = e^{-x^2}$ , come si verifica facilmente.
- *Convergenza uniforme.* Presentiamo tre svolgimenti.  
*PRIMO METODO.* Dobbiamo valutare

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| e^{-(x-1/n)^2} - e^{-x^2} \right|.$$

Per ogni  $n$ , definiamo  $g_n(x) = e^{-(x-1/n)^2} - e^{-x^2}$ ; il grafico di  $g_n$  è in figura.



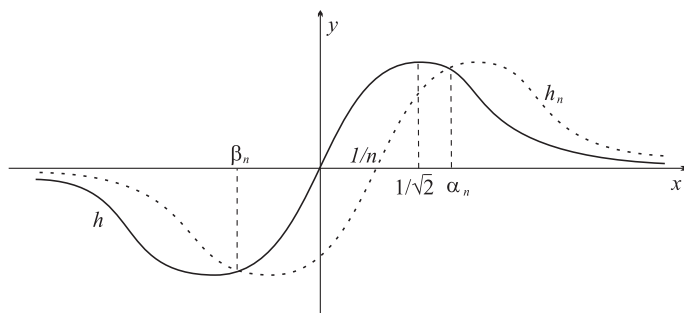
Ricerchiamo, tramite lo studio della derivata prima, i punti estremanti di  $g_n$ :

$$g'_n(x) = -2 \left( x - \frac{1}{n} \right) e^{-(x-1/n)^2} + 2x e^{-x^2}.$$

Quindi, condizione necessaria affinché  $x$  sia estremante per  $g_n$  è che

$$\left( x - \frac{1}{n} \right) e^{-(x-1/n)^2} = x e^{-x^2}. \quad (1)$$

Sia  $h(x) = x e^{-x^2}$ : si noti che  $h$  ha estremanti in  $\pm 1/\sqrt{2}$ . Sia inoltre  $h_n(x) = h(x - 1/n)$ . L'equazione (1) è equivalente a  $h(x) = h_n(x)$ .



Per  $n \geq 2$ , l'equazione  $h(x) = h_n(x)$  ammette due soluzioni  $\alpha_n$  e  $\beta_n$ , con  $\alpha_n > 1/\sqrt{2}$  e  $\beta_n < 0$ ;  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  sono i punti estremanti di  $g_n$ . Inoltre,  $g_n(\alpha_n) = -g_n(\beta_n)$ . Allora

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - e^{-x^2}| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| \\ &= e^{-(\alpha_n - 1/n)^2} - e^{-\alpha_n^2} \\ &= e^{-\alpha_n^2} \left( \frac{e^{-(\alpha_n - 1/n)^2}}{e^{-\alpha_n^2}} - 1 \right) \\ &= e^{-\alpha_n^2} \left( \frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1/n} - 1 \right). \end{aligned}$$

Essendo  $\alpha_n > 1/\sqrt{2}$ , abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - e^{-x^2}| = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\alpha_n^2} \left( \frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1/n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha_n^2}}{n\alpha_n - 1} = 0.$$

Poiché  $\alpha_n > 1/\sqrt{2}$ , per ogni  $n \geq 2$ , abbiamo  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha_n = \infty$ . Quindi  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $e^{-x^2}$  in  $\mathbb{R}$ .

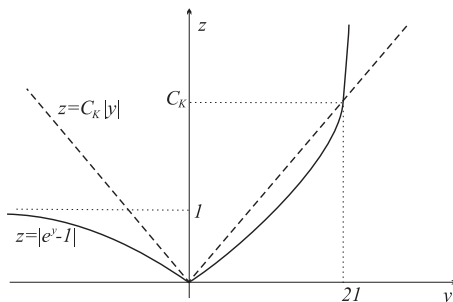
*SECONDO METODO.* Studieremo la convergenza uniforme prima su un insieme compatto del tipo  $K = [-\alpha, \alpha]$  e poi nel suo complementare  $K^c$ : l'idea è quella di studiare separatamente cosa succede in un intorno dell'origine e all'infinito. Sia per esempio  $\alpha = 10$ . Valutiamo

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - e^{-x^2}| = \sup_{x \in K} e^{-x^2} \left| e^{\left(\frac{2x}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} - 1 \right|.$$

Essendo  $x \geq -10$ , per ogni  $n$  e per ogni  $x \in K$  abbiamo

$$-(2x)/n + 1/n^2 \leq 20/n + 1/n^2 \leq 21.$$

Studiando il grafico di  $y \mapsto |e^y - 1|$ , per  $y \leq 21$  abbiamo  $|e^y - 1| \leq C_K |y|$ , con  $C_K = (e^{21} - 1)/21$  costante dipendente da  $K$ .



Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f_n(x) - e^{-x^2}| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left( e^{-x^2} C_K \left| \frac{2x}{n} - \frac{1}{n^2} \right| \right) \\ &\leq C_K \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left( \frac{2|x|}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &\leq C_K \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{20}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

che garantisce la convergenza uniforme di  $\{f_n\}$  a  $e^{-x^2}$  in  $K$ .

Studiamo ora la convergenza uniforme in  $\overline{K^c} = \{x : |x| \geq 10\}$ . Senza ripetere i conti già svolti con il primo metodo risolutivo di questo esercizio, dallo studio della derivata prima abbiamo che  $g_n$  è crescente in  $(-\infty, -10]$  e decrescente in  $[10, \infty)$ : inoltre  $g_n(10) > |g_n(-10)|$ . Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \geq 10} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(10) - f(10)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-100} (e^{20/n - 1/n^2} - 1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

che garantisce la convergenza uniforme di  $\{f_n\}$  a  $e^{-x^2}$  in  $\overline{K^c}$ . Concludendo, abbiamo convergenza uniforme in  $\mathbb{R}$ .



TERZO METODO. Sia  $f(x) = e^{-x^2}$ . Osserviamo che

$$f_n(x) = f(x - 1/n) \quad x \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per il teorema del valor medio

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x - 1/n) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f'(x)|}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} 2|x|e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Poiché la funzione  $x \mapsto |x|e^{-x^2}$  è limitata in  $\mathbb{R}$  (è continua e tende a zero all'infinito), possiamo concludere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

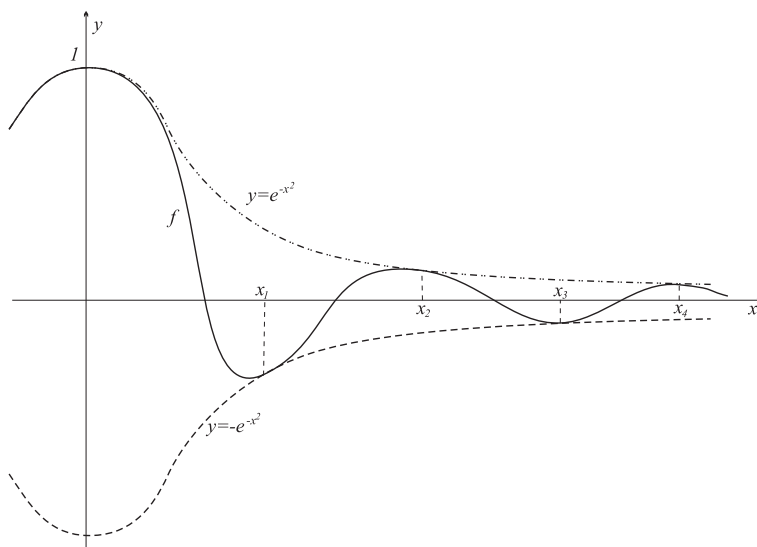
ciò che prova la convergenza uniforme di  $\{f_n\}$  a  $f$  in  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 1.0.9.** Si consideri la funzione  $f_n$  definita da

$$f_n(x) = e^{-(x-1/n)^2} \cos\left(e^{(x-1/n)^2}\right).$$

- Si studi la convergenza puntuale di  $\{f_n\}$ . Si verifichi che  $\{f_n\}$  converge uniformemente in ogni compatto  $K$ .
- Si studi la convergenza uniforme di  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$ .

Svolgimento di a. • **Grafico di  $f_n$ .** Il grafico di  $f_n$  si ottiene trasladando il grafico della funzione  $f(x) = e^{-x^2} \cos(e^{x^2})$  verso destra.



Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , sia  $x_k = \sqrt{\log(k\pi)}$ : abbiamo  $|f(x_k)| = e^{-x_k^2}$ . Il lettore osservi che i punti  $x_k$  non sono punti estremanti (basta verificare che  $f'(x_k) \neq 0$ ) e che la distanza fra  $x_k$  e  $x_{k+1}$  diminuisce al crescere di  $k$ .

• *Convergenza puntuale.* Si verifica facilmente che  $\{f_n\}$  converge puntualmente a  $f$  in  $\mathbb{R}$ .

• *Convergenza uniforme.* L'esercizio non è molto differente dal precedente nel caso  $a_n = 1/n$ . Possiamo sfruttare il fatto che  $f_n(x) = f(x - 1/n)$  e usare il teorema di Lagrange, in modo analogo a quanto fatto nel terzo metodo dell'esercizio precedente, per dimostrare che per ogni  $M > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Ciò prova che  $\{f_n\}$  converge a  $f$  uniformemente in  $[-M, M]$ .

*Svolgimento di b* • *Convergenza uniforme.* Sia  $\epsilon > 0$ . Non è difficile mostrare che esiste  $M > 0$  tale che

$$\sup_{|x| \geq M} |f_n(x)| < \epsilon/4 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{|x| \leq M} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{|x| \geq M} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{|x| \leq M} |f_n(x) - f(x)| + \epsilon/2. \end{aligned}$$

Per il teorema del valor medio

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \leq M} |f_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{n} \sup_{|x| \leq M} |f'_n(x)| \\ &\leq \frac{C}{n}. \end{aligned}$$

Sia  $N$  tale che  $C/N < \epsilon/2$ . Allora per ogni  $n \geq N$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

e quindi  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  in  $\mathbb{R}$ .

## Capitolo 2

# Serie di funzioni

**Esercizio 2.0.1.** Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  come nell'Esercizio 1.0.1. Si studino le convergenze puntuale e uniforme della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  nei seguenti casi:

- $a_n = 1/n^2$ ;
- $a_n = 1/n$ ;
- $a_n = (-1)^n/n$ .

*Svolgimento di a.* • **Convergenza puntuale.** Se  $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ , allora  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è identicamente nulla e quindi la serie converge a 0.

Se  $x \in (0, 2)$ , allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{1 \leq n < 1/x} f_n(x);$$

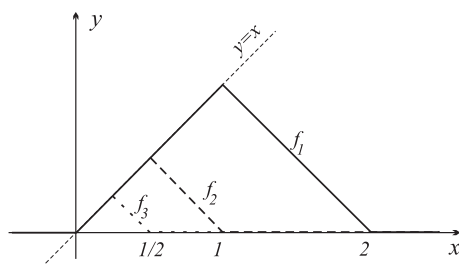
avendo solo un numero finito di termini non nulli, quest'ultima serie converge. Quindi  $\sum f_n$  converge puntualmente in  $\mathbb{R}$ , per qualunque scelta della successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

• **Convergenza uniforme.** Notiamo che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}.$$

Quindi, per il criterio di Weierstrass, la serie converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ .

*Svolgimento di b.* • **Grafico di  $f_n$ .**



- *Convergenza uniforme.* La condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = 0$$

è soddisfatta. Il criterio di Weierstrass non si applica, perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Presentiamo due metodi risolutivi.

*PRIMO METODO.* Mostriamo che la successione delle somme parziali della serie data non è di Cauchy. Per ogni  $n, k \in \mathbb{N}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{i=1}^{n+k} f_i(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) \right| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \\ &\geq \sup_{x \in [0, 1/(n+k)]} \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(1/(n+k)) \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{n+k-n}{n+k} \\ &= \frac{k}{n+k}. \end{aligned}$$

Scegliendo, per esempio,  $n = k$ , abbiamo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{i=1}^{2n} f_i(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Quindi la successione delle somme parziali non è di Cauchy e  $\sum_n f_n$  non converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ .

Si osservi che dato  $\alpha > 0$ ,  $\sum f_n$  converge uniformemente in  $(-\infty, 0] \cup [\alpha, \infty)$ , perché solo un numero finito di addendi della serie sono ivi non nulli.

*SECONDO METODO.* Ricordiamo che la funzione somma di una serie di funzioni continue uniformemente convergente è continua. Affermiamo che, nel caso in esame, la funzione somma  $f$  non è continua, da cui seguirà che la serie data non converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ . Per dimostrare l'affermazione, osserviamo che

$$f(1/n) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(1/n) \geq \sum_{i=1}^n f_i(1/n) = \sum_{i=1}^n 1/n = 1 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Conseguentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x);$$

perciò  $f$  non è continua in 0, come affermato.

*Svolgimento di c.* • **Convergenza uniforme.** Essendo  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  non crescenti per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , ed essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza uniforme, per il criterio di Leibniz  $\sum f_n$  converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.0.2.** Sia  $f_n$  la funzione definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x. \end{cases}$$

a. Si determini l'insieme  $E$  di convergenza puntuale della serie  $\sum_n f_n$  e si mostri che la sua somma è continua in  $E$ ;

b. si mostri che  $\sum f_n$  non converge uniformemente in  $E$ .

*Svolgimento di a.* Osserviamo che  $f_n(x) = \mathbf{1}_{[1/(n+1), 1/n)}(x) \cdot \sin^2(\pi/x)$ .

Se  $x \notin (0, 1)$ , allora  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è identicamente nulla; se  $x \in (0, 1)$ , allora  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è definitivamente nulla. Quindi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty$  ed  $E = \mathbb{R}$ .

Inoltre,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} \sum_{n \geq 1} 0 & \text{se } x \notin (0, 1) \\ \left( \sum_{n \neq \lceil 1/x \rceil} 0 \right) + f_{\lceil 1/x \rceil}(x) & \text{se } x \in (0, 1), \end{cases}$$

e quindi la funzione somma è  $f(x) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x) \cdot \sin^2(\pi/x)$ .

*Svolgimento di b.* Osserviamo che

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (1/(n+1), 1/n)} \sin^2(\pi/x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (n\pi, (n+1)\pi)} \sin^2(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

e quindi la serie data non converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.0.3.** Si studino le convergenze puntuale, assoluta e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}.$$

• **Convergenza puntuale.** La serie data converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  per il criterio di Leibniz sulle serie a segno alterno.

• **Convergenza assoluta.** Per ogni  $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2 + n}{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Quindi la serie diverge assolutamente in ogni punto di  $\mathbb{R}$ .

• *Convergenza uniforme.* Osserviamo che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x^2 + n}{n^2} \right| = \infty \quad n \in \mathbb{N}.$$

Perciò la condizione necessaria di convergenza della serie  $\sum_n f_n$  non è soddisfatta, e quindi essa non converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ .

Dimostriamo che  $\sum_n f_n$  converge uniformemente in  $[-\alpha, \alpha]$ , dove  $\alpha > 0$ . Infatti,  $\{(x^2 + n)/n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione monotona non crescente per ogni  $x$  in  $[-\alpha, \alpha]$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-\alpha, \alpha]} \left| \frac{x^2 + n}{n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2 + n}{n^2} = 0.$$

La tesi segue dal teorema di Leibniz per serie di funzioni.

**Esercizio 2.0.4.** *Data la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n,$$

a. *si determini l'insieme dei punti dove converge;*

b. *si stabilisca se la convergenza è uniforme in  $[0, \pi/4]$ ;*

c. *si calcoli  $\int_0^{\pi/4} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n \right) dx$ .*

*Svolgimento di a.* Se  $x \notin \pi/2 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , allora  $0 \leq |\sin x| < 1$ , e la serie data è una serie geometrica di ragione compresa tra  $-1$  e  $1$ , ergo assolutamente convergente.

Se  $x \in \pi/2 + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , allora la serie diverge (il suo termine generale è la successione costante 1).

Se  $x \in 3\pi/2 + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , allora la serie è indeterminata (il suo termine generale è  $\{(-1)^n\}$ ).

*Svolgimento di b.* Osserviamo che

$$\sup_{x \in [0, \pi/4]} (\sin x)^n \leq 2^{-n/2}.$$

Poiché  $\sum_n 2^{-n/2} < \infty$ , la serie data converge uniformemente in  $[0, \pi/4]$  per il criterio di Weierstrass.

*Suggerimento di c.* Si calcoli la funzione somma della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n$ .

**Esercizio 2.0.5.** *Si consideri la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

a. *Si determini l'insieme  $E \subset \mathbb{R}$  in cui essa converge puntualmente, e si indichi con  $f(x)$  la sua somma.*

b. *Si verifichi che la serie converge uniformemente in  $[a, 2]$ , per ogni  $a \in (0, 1)$ .*

c. Si calcoli  $f(3/2)$  con un errore inferiore a  $10^{-2}$ .

*Svolgimento di a.* Se  $x \in (0, 2)$ , la serie assegnata converge assolutamente.

Se  $x = 0$ , la serie diverge.

Se  $x = 2$ , allora la serie converge per il criterio di Leibniz.

Infine, se  $x \notin [0, 2]$ , allora la serie diverge perché il suo termine generale non è infinitesimo.

In conclusione,  $E = (0, 2]$ .

*Svolgimento di b.* Studiamo la convergenza uniforme separatamente in  $[a, 1]$  e in  $[1, 2]$ .

Indichiamo con  $f_n(x)$  il termine generale della serie. Osserviamo che

$$\sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x)| \leq \frac{|a-1|^n}{n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

La serie  $\sum |a-1|^n/n$  è convergente; per il criterio di Weierstrass la serie  $\sum_n f_n$  converge uniformemente in  $[a, 1]$ , per ogni  $0 < a < 1$ .

Mostriamo che la serie  $\sum_n f_n$  converge uniformemente in  $[1, 2]$  in virtù del

criterio di Leibniz per le serie di funzioni.<sup>1</sup> Infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1,2]} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 0$$

e la successione  $\{(x-1)^n \log(1+1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è non crescente per ogni  $x$  in  $[1, 2]$ .

**Esercizio 2.0.6.** *Data la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{x^{2n} + n^a} \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

*si stabilisca per quali valori di  $a$  essa*

<sup>1</sup> Ricordiamo il noto Teorema di Leibniz:

**Teorema 2.1.** *Sia  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  una successione positiva, decrescente e infinitesima. Allora  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  converge a un numero  $S$ . Inoltre, per ogni  $N > 0$*

$$\left| S - \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n \right| \leq a_{N+1}. \quad (2.1)$$

Supponiamo ora che per la serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$  e per l'insieme  $A \subset \mathbb{R}$  si abbia che, per ogni  $x \in A$  fissato,  $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  sia una successione positiva, decrescente e infinitesima; allora il Teorema di Leibniz garantisce che  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$  converge puntualmente in  $A$ ; inoltre (2.1) garantisce che

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n f_n(x) \right| \leq f_N(x), \quad \forall x \in A, N > 0$$

dove abbiamo indicato con  $f(x)$  la somma della serie per  $x \in A$ .

E' noto, per definizione, che una serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$  puntualmente convergente alla funzione  $g(x)$  in  $A$ , converge uniformemente in  $A$  se la successione delle sue somme parziali  $\left\{ \sum_{n=0}^N g_n(x) \right\}_{N=0}^{\infty}$  converge uniformemente a  $g(x)$  in  $A$ : in altre parole se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| g(x) - \sum_{n=0}^N g_n(x) \right| = 0. \quad (2.2)$$

Se ora torniamo alla serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$  con le ipotesi sopra descritte, (2.1) garantisce che (2.2) è equivalente a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N (-1)^n f_n(x) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} f_N(x) = 0. \quad (2.3)$$

L'ultima uguaglianza è nota come criterio di Leibniz per le serie di funzioni. In altre parole

**Teorema 2.2.** *Sia  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  una successione di funzioni positive, tale che  $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  sia decrescente per ogni  $x \in A$  fissato e tale che valga (2.3), allora la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$  converge uniformemente in  $A$ .*



- a. converge puntualmente in  $|x| < 1$ ;
- b. converge puntualmente in  $|x| > 1$ ;
- c. converge puntualmente in  $\mathbb{R}$ ;
- d. converge uniformemente in  $[-1, 1]$ , dopo aver dimostrato che converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  se  $a > 2$ .

*Svolgimento di a. e b.* Osserviamo che

$$\frac{|x|^n}{x^{2n} + n^a} \leq |x|^n \quad x \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per ogni  $a \in \mathbb{R}^+$ , la serie  $\sum_n f_n$  converge puntualmente in  $(-1, 1)$  in virtù del criterio del confronto.

Similmente,

$$\frac{|x|^n}{x^{2n} + n^a} < \frac{1}{|x|^n} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per ogni  $a \in \mathbb{R}^+$ , la serie  $\sum_n f_n$  converge puntualmente in  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  in virtù del criterio del confronto.

*Svolgimento di c.* Dobbiamo studiare i punti  $\pm 1$ : in entrambi i casi abbiamo

$$\frac{1}{1 + n^a} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^a}$$

e quindi la serie converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  se e solo se  $a > 1$ .

*Svolgimento di d.* Indichiamo con  $f_{n,a}(x)$  il termine generale della serie data. Mostriamo che la tesi segue dal criterio di Weierstrass. Poiché  $f_{n,a}$  è pari, è sufficiente calcolare  $\sup_{x \geq 0} |f_{n,a}(x)|$  e  $\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_{n,a}(x)|$ . Cerchiamo i punti estremanti in  $x \geq 0$ . Un semplice calcolo mostra che

$$f'_{n,a}(x) = \frac{nx^{n-1}(n^a - x^{2n})}{(x^{2n} + n^a)^2};$$

il punto di massimo di  $f_{n,a}$  è  $n^{a/2n}$ . Perciò

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{n,a}(x)| = f_{n,a}(n^{a/2n}) = \frac{1}{2n^{a/2}}.$$

Ora, se  $a > 2$  la serie  $\sum_n 1/(2n^{a/2})$  è convergente. Per il criterio di Weierstrass la serie  $\sum_n f_{n,a}$  converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ .

Osserviamo che il punto di massimo di  $f_{n,a}$  è in  $(1, \infty)$  e che  $f_{n,a}$  è crescente in  $[0, 1]$ . Ne deduciamo che

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f_{n,a}(x)| = f_{n,a}(1) = \frac{1}{1 + n^a}.$$

Ora, se  $a > 1$ , la serie  $\sum_n 1/(1 + n^a)$  è convergente. Per il criterio di Weierstrass la serie  $\sum_n f_{n,a}$  converge uniformemente in  $(-1, 1)$ .

Notiamo, infine, che se  $a \leq 1$ , la serie non converge puntualmente in  $-1$  e in  $1$ ; *a fortiori* essa non può ivi convergere uniformemente.

**Esercizio 2.0.7.** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{\alpha} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si determinino, in dipendenza del parametro reale  $\alpha$ ,

- l'insieme di convergenza puntuale;
- l'insieme di convergenza uniforme.
- Indicata con  $f(x)$  la somma della serie nell'insieme di convergenza puntuale, si calcoli, quando esiste, il valore del  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Svolgimento di a. Se  $x \neq 0$ , allora

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{\alpha} &= \left(1 - \frac{n}{x} \left(\frac{x}{n} - \frac{x^3}{6n^3} + o(n^{-3})\right)\right)^{\alpha} \\ &\sim \frac{x^{2\alpha}}{(6n^2)^{\alpha}} \end{aligned}$$

per  $n$  tendente a  $\infty$ . Quindi la serie data converge puntualmente in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  se e solo se  $\alpha > 1/2$ .

Svolgimento di b. Il termine generale della serie è una funzione pari. Osserviamo che il “cambiamento di variabile”  $x/n = t$  assicura che

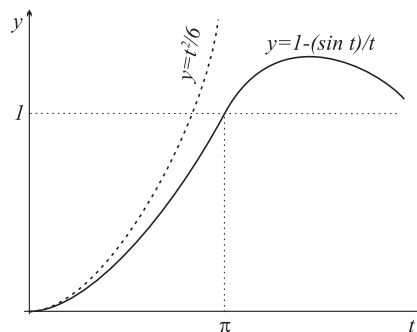
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|1 - \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{\alpha} = \sup_{t > 0} \left|1 - \frac{\sin t}{t}\right|^{\alpha}.$$

Notiamo che il secondo membro è  $> 1$ , perché  $\alpha$  è positivo e, come si verifica facilmente,

$$\sup_{t > 0} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) > 1.$$

Quindi la condizione necessaria di convergenza è violata e la serie data non converge uniformemente in  $\mathbb{R}^+$ , e quindi in  $\mathbb{R}$ .

Studiamo la convergenza uniforme in  $(0, M]$ , con  $M > 0$ . Si osservi che la funzione  $t \mapsto 1 - (\sin t)/t$  è crescente in  $(0, \pi]$  e che  $0 < 1 - (\sin t)/t < t^2/6$  (si utilizzi il polinomio di McLaurin).



Cambiando variabile ( $x/n = t$ )

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0, M]} \left|1 - \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{\alpha} &= \sup_{t \in (0, M/n]} \left|1 - \frac{\sin t}{t}\right|^{\alpha} \\ (\text{se } M/n \leq \pi) &\leq \left(1 - \frac{\sin(M/n)}{(M/n)}\right)^{\alpha} \\ &\leq \frac{C}{n^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Poiché  $\sum_n n^{-2\alpha}$  converge per ogni  $\alpha > 1/2$ , la serie data converge uniformemente in  $(0, M]$  per ogni  $M > 0$ , in virtù del criterio di Weierstrass. Poiché il termine generale della serie data è una funzione pari, possiamo concludere che la serie data converge uniformemente in  $[-M, 0) \cup (0, M]$  per ogni  $M > 0$ .

*Svolgimento di c.* Sia

$$f_{n,\alpha}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^\alpha & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Le funzioni  $f_{n,\alpha}$  sono continue in  $\mathbb{R}$ . Si verifica facilmente, utilizzando le considerazioni svolte nei punti precedenti, che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}$  converge uniformemente in  $[-M, M]$  per ogni  $\alpha > 1/2$  e per ogni  $M > 0$ .

Quindi la funzione somma  $f_\alpha$  è continua e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_{n,\alpha}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Esercizio 2.0.8.** Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{n^2}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Si dimostri che essa converge semplicemente in  $\mathbb{R}$ ;
- si stabilisca se la convergenza è uniforme nell'intervallo  $[0, \pi]$ ;
- si stabilisca se la convergenza è uniforme nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

*Svolgimento di a.* Se  $x \neq 3\pi/2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , allora

$$\left| \frac{\sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{n^2}} \right| \leq \frac{1}{(2 + \sin x)^{n^2}} \leq \frac{1}{(2 + \sin x)^n}.$$

Poiché  $1 < 2 + \sin x \leq 3$ , la serie  $\sum_n 1/(2 + \sin x)^n$  converge; per il criterio del confronto, la serie data converge assolutamente, e, *a fortiori*, semplicemente.

Se  $x = 3\pi/2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , il termine generale della serie è identicamente nullo.

Riassumendo, la serie converge puntualmente in  $\mathbb{R}$ .

*Svolgimento di b.* Osserviamo che

$$\sup_{x \in [0, \pi]} \left| \frac{\sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{n^2}} \right| \leq \frac{1}{2^{n^2}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

La serie  $\sum_n 2^{-n}$  converge. Per il criterio di Weierstrass, la serie data converge uniformemente in  $[0, \pi]$ .

*Svolgimento di c.* Studiamo ora la convergenza uniforme in  $[-\pi, 0]$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  poniamo

$$f(x) = 2 + \sin x \quad \text{e} \quad f_n(x) = \sin(2nx).$$

Consideriamo gli sviluppi di Taylor di  $f$  e di  $f_n$  centrati in  $-\pi/2$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2\right), \\ f_n(x) &= 2n(-1)^n \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + o\left(x + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Sia  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x$  in  $[-\pi/2 - \delta, -\pi/2 + \delta]$  valgono le stime seguenti

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 &\leq |2 + \sin x| \leq 1 + \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2, \\ n \left|x + \frac{\pi}{2}\right| &\leq |\sin(2nx)| \leq 3n \left|x + \frac{\pi}{2}\right|. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-\pi, 0]} \left| \frac{\sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{n^2}} \right| &\geq \sup_{-\pi/2 - \delta \leq x \leq -\pi/2 + \delta} \left| \frac{\sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{n^2}} \right| \\ &\geq \sup_{-\pi/2 - \delta \leq x \leq -\pi/2 + \delta} \frac{3n |x + \pi/2|}{\left(1 + (x + \pi/2)^2/3\right)^{n^2}} \\ &\geq \sup_{t \in [0, \delta]} \frac{3nt}{(1 + t^2/3)^{n^2}}. \end{aligned}$$

Sia  $g_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $g_n(t) = 3nt(1 + t^2/3)^{-n^2}$ . Calcoliamo

$$g'_n(t) = \frac{n(3 + t^2 - 2n^2 t^2)}{(1 + t^2/3)^{n^2+1}}.$$

Un'analisi degli zeri e del segno di  $g'_n$  mostra che il punto di massimo assoluto di  $g_n$  è  $\sqrt{3/(2n^2 - 1)}$ . Per  $n$  abbastanza grande, questo punto cade nell'intervallo  $[0, \delta]$ . Conseguentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-\pi, 0]} \left| \frac{\sin(2nx)}{(2 + \sin x)^{n^2}} \right| &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \delta]} g_n(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\sqrt{3/(2n^2 - 1)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n \sqrt{\frac{3}{2n^2 - 1}}}{\left(1 + \frac{1}{2n^2 - 1}\right)^{n^2}} \\ &= 3 \sqrt{\frac{3}{2e}}. \end{aligned}$$

Quindi la serie non converge uniformemente in  $[-\pi, \pi]$ .

## 2.1 Serie di potenze

**Esercizio 2.1.1.** Si determinino il raggio di convergenza, l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme delle seguenti serie:

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^{-n} x^n$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} (\log(1+n))^{-1} x^n$$

*Svolgimento di a.* Sia  $a_n = (n^{1/n} - 1)^{-n}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^{1/n} - 1)^n}{((n+1)^{1/(n+1)} - 1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^{1/(n+1)} - 1} \left( \frac{n^{1/n} - 1}{(n+1)^{1/(n+1)} - 1} \right)^n \\ &= \infty \cdot (\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Quindi il raggio di convergenza è nullo e la serie converge solo per  $x = 0$ .

*Svolgimento di b.* Essendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2+n)}{\log(1+n)} = 1,$$

il raggio di convergenza è 1. Studiamo il comportamento della serie di potenze agli estremi dell'intervallo di convergenza. In 1 abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\log(1+n)} = \infty,$$

e in  $-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+n)},$$

che converge per il teorema di Leibniz. Quindi l'insieme di convergenza semplice è  $[-1, 1)$ . Inoltre la serie di potenze data converge uniformemente in  $[-1, \alpha]$ , per ogni  $-1 < \alpha < 1$ .

**Esercizio 2.1.2.** Si calcolino, con un errore inferiore a  $10^{-2}$ , i seguenti integrali:

$$a. \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x} dx$$

$$c. \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2x} dx$$

*Svolgimento di a.* Sia  $f(x) = (1 - \cos x)/x$ ;  $f$  è continua in  $(0, \pi/2]$  e  $f(x) \sim x/2$  per  $x \rightarrow 0$ . Perciò  $f$  è integrabile in  $[0, \pi/2]$ . Poiché la funzione  $x \mapsto \cos x$  è analitica in  $\mathbb{R}$  e

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

semplici calcoli mostrano che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

Si osservi che il raggio di convergenza della serie di potenze ottenuta è  $\infty$  e quindi  $f$  è analitica in  $\mathbb{R}$ . Poiché la serie di potenze converge uniformemente in  $[0, \pi/2]$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x} dx &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n-1} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \int_0^{\pi/2} x^{2n-1} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \left[ \frac{x^{2n}}{2n} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n)!} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2n}. \end{aligned}$$

Per la stima (2.1) nel teorema di Leibniz 2.1

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x} dx - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n)!} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2n} \right| \leq \frac{1}{2N(2N)!} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2N} \quad N \geq 2.$$

Se  $N = 3$ , abbiamo  $\frac{1}{2N(2N)!} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2N} < 10^{-2}$ : quindi una stima dell'integrale assegnato, con errore inferiore a  $10^{-2}$ , è

$$\sum_{n=1}^2 \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n)!} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2n}.$$

*Svolgimento di c.* Sia  $f(x) = (e^x - e^{-x})/(2x)$ . Per  $x \rightarrow 0$ , abbiamo  $f(x) \sim 1$  e quindi  $f$  integrabile in  $[0, 1]$ . Essendo la funzione esponenziale analitica in  $\mathbb{R}$  e

$$e^x = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

abbiamo che

$$f(x) = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} x^n - \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) = \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

Si osservi che il raggio di convergenza della serie di potenze ottenuta è  $\infty$  e quindi  $f$  è analitica in  $\mathbb{R}$ . Poiché questa serie di potenze converge uniformemente in  $[0, 1]$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , poniamo

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!};$$

per ogni  $N$  fissato vogliamo ottenere una stima del tipo  $a_{N+k} \leq a_N (A_N)^k$  per ogni  $k$  intero positivo e dove  $A_N$  è una costante:

$$\begin{aligned} a_{N+k} &= \frac{1}{(2N+2k+1)(2N+2k+1)(2N+2k) \dots (2N+2)(2N+1)!} \\ &\leq \frac{1}{(2N+1)(2N+2)^{2k}(2N+1)!} \\ &= \frac{a_N}{(2N+2)^{2k}}. \end{aligned}$$

Se  $N$  è positivo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=N}^{\infty} a_j &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k} \\ &\leq a_N \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2N+2} \right)^{2k} \\ &= \frac{a_N}{1 - (2N+2)^{-2}} \\ &= \frac{(2N+2)^2 - 1}{(2N+2)^2(2N+1)(2N+1)!}; \end{aligned}$$

quest'ultima espressione è minore di  $10^{-2}$  se  $N > 2$ . Perciò possiamo stimare l'integrale richiesto con

$$\sum_{n=0}^1 \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} = \frac{19}{18}.$$

**Esercizio 2.1.3.** Si determinino l'insieme di convergenza semplice, gli insiemi di convergenza uniforme e la somma delle seguenti serie:

$$c. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$e. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n-1)!}$$

*Svolgimento di c.* Sia  $a_n = 1/[n(n+1)]$ . Il raggio di convergenza della serie di potenze è 1 perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Nei punti 1 e  $-1$  abbiamo rispettivamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)},$$

che sono entrambe convergenti. La serie di potenze data converge uniformemente in  $[-1, 1]$ .

Osserviamo che la serie di potenze  $\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}/(n+1)$  converge uniformemente in  $[-1, 1]$ . Per ogni  $x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^x t^{n-1} dt \\ (\text{conv. uniforme}) \quad &= \int_0^x \left( \frac{1}{t^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right) dt \\ &= - \int_0^x \left( \frac{1}{t^2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-t)^n \right) dt \\ (\text{essendo } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^n / n = \log(1+t)) \quad &= - \int_0^x \frac{\log(1-t) + t}{t^2} dt, \end{aligned}$$

che rappresenta la somma della serie di potenze in  $[-1, 1]$ . Si osservi che  $(\log(1-t) + t)/t^2 \sim -1/2$  per  $t \rightarrow 0$  e, quindi, non c'è alcun problema di integrabilità.

*Svolgimento di e.* Sia  $a_n = n^2/(n-1)!$ . Il raggio di convergenza della serie di potenze data è  $\infty$ , perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0.$$

La serie data converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  e uniformemente in ogni sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}$ . Per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , possiamo scegliere un insieme contenente  $x$  in cui abbiamo convergenza uniforme; allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n-1)!} &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} n x^{n-1} \\ &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} D(x^n) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= x \cdot D \left( x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} nx^{n-1} \right) \\ &= x \cdot D \left( x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} D(x^n) \right) \\ &= x \cdot D \left[ x \cdot D \left( x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \\ &= x \cdot D \left[ x \cdot D(xe^x) \right] \\ &= e^x(x + 3x^2 + x^3), \end{aligned}$$

che è la somma richiesta.