

**Esercizi: equazioni differenziali e sistemi di equazioni differenziali.**

Versione del 13 giugno 2022

## Indice

<b>1</b>	<b>Equazioni differenziali del primo ordine</b>	<b>1</b>
1.1	Equazioni a variabili separabili . . . . .	1
1.2	Equazioni lineari . . . . .	2
1.3	Equazioni di Bernoulli . . . . .	2
1.4	Equazioni di Riccati . . . . .	3
1.5	Equazioni omogenee . . . . .	3
1.6	Esercizi vari . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine</b>	<b>9</b>
2.1	Lineari a coefficienti costanti . . . . .	9
2.1.1	Omogenei . . . . .	9
2.1.2	Non omogenei . . . . .	10
2.2	Esercizi vari . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Equazioni differenziali di ordine superiore al primo</b>	<b>12</b>
3.1	Lineari a coefficienti costanti . . . . .	12
3.1.1	Metodo di verosimiglianza . . . . .	12
3.1.2	Con metodo di variazione delle costanti arbitrarie . . . . .	14
3.2	Lineari a coefficienti non costanti . . . . .	14
3.2.1	Equazioni di Eulero I . . . . .	14
3.2.2	Equazioni di Eulero II (con metodo di variazione delle costanti arbitrarie) . . . . .	15
3.3	Esercizi vari . . . . .	15

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).

Gli esercizi con “\*” sono piú difficili degli altri !

## 1 Equazioni differenziali del primo ordine

### 1.1 Equazioni a variabili separabili

1. Si integrino le seguenti equazioni

- |    |  |  |
|----|--|--|
| a. | $ye^{2x} - (1 + e^{2x})y' = 0$             | $[y(x) = c\sqrt{1 + e^{2x}}, c \in \mathbb{R}.]$             |
| b. | $\tan x \sin^2 y + y' \cos^2 x \cot y = 0$ | $[\cot^2 y(x) = c + \tan^2 x, c \in \mathbb{R}.]$            |
| c. | $xy' - y = y^3$                            | $[y = 0, x(y) = \frac{cy}{\sqrt{1+y^2}}, c \in \mathbb{R}.]$ |
| d. | $y - xy' = a(1 + x^2y'), a \in \mathbb{R}$ | $[y(x) = \frac{a+cx}{1+ax}, c \in \mathbb{R}.]$              |
| e. | $3e^x \tan y + (1 - e^x)y' \sec^2 y = 0$   | $[y(x) = \arctan(c(1 - e^x)^3), c \in \mathbb{R}.]$          |
| f. | $y' \tan x = y$                            | $[y(x) = c \sin x, c \in \mathbb{R}.]$                       |

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

- |    |  |  |
|----|--|--|
| a. | $\begin{cases} (1 + e^x)yy' = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ | $[y(x) = \sqrt{1 + \log(\frac{1+e^x}{2})^2}.]$ |
|----|--|--|

- b.  $\begin{cases} (xy^2 + x) + (x^2y - y)y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$   $[y(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}.]$
- c.  $\begin{cases} y' \sin x = y \log y \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$   $[y(x) = 1.]$
- d.  $\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$   $[y(x) = -e^{-x^2}.]$
- e.  $\begin{cases} y' = \frac{xy}{y-1} \\ y(0) = e \end{cases}$   $[y(x) - \log y(x) = 1/2x^2 + e - 1.]$
- f.  $\begin{cases} y' = (y^2 - y) \log(2+x) \\ y(-1) = 1/2 \end{cases}$   $[y(x) = \frac{e^{x+1}}{(x+2)^{x+2} + e^{x+1}}.]$

3. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si provi che ammette infinite soluzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

4. Si determini  $y_0 \in \mathbb{R}$  tale che il problema

$$\begin{cases} y' = \frac{5}{2}ty^{1/5} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

abbia soluzione locale, ma non unica: si scrivano almeno 3 soluzioni.

5. Si determinino tutte le soluzioni locali dei seguenti problemi di Cauchy

$$a. \begin{cases} y'(x^2 - 1) = 2xy \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad b. \begin{cases} y'(x^2 - 1) = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad c. \begin{cases} y'(x^2 - 1) = 2xy \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

## 1.2 Equazioni lineari

1. Si integrino le seguenti equazioni

- a.  $xy' - y - x^3 = 0$   $[y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + c)x, c \in \mathbb{R}.]$
- b.  $y' = \frac{y}{x+1} + e^x(x+1)$   $[y(x) = (e^x + c)(x+1), c \in \mathbb{R}.]$
- c.  $y' = -y \cot x + 2 \cos x$
- d.  $y' = y \tan x + \sin x$
- e.  $y' = \frac{2y}{x} + \frac{x+1}{x}$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

- a.  $\begin{cases} y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$   $[y(x) = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.]$
- b.  $\begin{cases} xy' + y - e^x = 0 \\ y(a) = b \end{cases}$  con  $a \neq 0$
- c.  $\begin{cases} y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{1}{x(1+x^2)} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$   $[y(x) = \frac{\log(-x)}{1+x^2}.]$
- d.  $\begin{cases} y' + 3x^2y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$   $[y(x) = (1 + 2e^{-x^3})/3.]$

3. Stabilire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' + 2\alpha \frac{y}{x} = x^\alpha \log x$$

verificano la relazione

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = 0. \quad [-1/2 < \alpha < 0.]$$

### 1.3 Equazioni di Bernoulli

1. Si integrino le seguenti equazioni

a.  $y' + 2y \sin x = \frac{\sin x}{y^2}$   $[y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + ce^{6 \cos x}}, c \in \mathbb{R}.]$

b.  $y' = -\frac{y}{6x} + \frac{x}{2y^5}$

c.  $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$   $[y(x) = 0 \text{ e } y(x) = x^4 (\frac{1}{2} \log |x| + c)^2, c \in \mathbb{R}.]$

d.  $y' - y + y^2(t^2 + t + 1) = 0$

e.  $y' - 2y = 2(e^t + t)\sqrt{y}$   $[y(x) = 0 \text{ e } y(x) = (ce^t + te^t - t - 1)^2, c \in \mathbb{R}.]$

f.  $yy' - y^2 = 3t$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

a.  $\begin{cases} (x^2 + x)y' + 3(2x + 1)y = 3x\sqrt{x+1}y^{2/3} \\ y(2/3) = 0 \end{cases}$   $[y(x) = \left(\frac{2(1+x)^{3/2}}{5x} - \frac{2(1+x)^{1/2}}{3x}\right)^3.]$

b.  $\begin{cases} (e^t + t^2)y' + (2e^t + 1)y = \sqrt[3]{t+1}y^4 \\ y(-3) = 0 \end{cases}$

c.  $\begin{cases} y' - \frac{y}{t} - y^3 \sin t = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$   $[y(t) = \left(2 \cos t - 4 \frac{\sin t}{t} - 4 \frac{\cos t}{t^2} + \frac{3\pi^2 - 4}{t^2}\right)^{-1/2}.]$

d.  $\begin{cases} y' = 4y + 2e^t \sqrt{y} \\ y(0) = 4 \end{cases}$   $[y(t) = (3e^{2t} - e^t)^2.]$

### 1.4 Equazioni di Riccati

1. Si integrino le seguenti equazioni

a.  $y' = y^2 - ty + 1$  (si noti che esiste un polinomio del primo ordine che è soluzione)

b.  $(1 + x^2)y' - (1 + 2x)y + y^2 = 1 - x$

$[a. y(t) = t + \frac{e^{t^2/2}}{c - \int_0^t e^{s^2/2} ds} \text{ con } c \in \mathbb{R} \text{ e } y(t) = t; b. y(x) = x + \frac{1}{1 + ce^{-\arctan x}} \text{ con } c \in \mathbb{R} \text{ e } y(x) = x.]$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

a.  $\begin{cases} x' = (t-1)x^2 + (1-2t)x + t \\ x(0) = 2 \end{cases}$   $[x(t) = \frac{e^t + t + 1}{e^t + t}.]$

b.  $\begin{cases} y' + 2e^t y - y^2 = e^{2t} + e^t \\ y(0) = 2 \end{cases}$  ( $e^t$  è una soluzione dell'equazione differenziale)  $[y(t) = e^t + \frac{1}{1-t}.]$

## 1.5 Equazioni omogenee

1. Si integrino le seguenti equazioni

a.  $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$   $[y(x) = -x \log \log \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R}.]$

b.  $y' = -\frac{x+y}{x}$   $[y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}, c \in \mathbb{R}.]$

c.  $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$   $[y(x) = \frac{c}{2}x^2 - \frac{1}{2c}, c \in \mathbb{R}.]$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

a.  $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -2xyy' \\ y(2) = 1 \end{cases}$   $[y(x) = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}.]$

b.  $\begin{cases} y' = \frac{t}{y} + \frac{2y}{t} \\ y(1) = -2 \end{cases}$   $[y(t) = -t\sqrt{5t^2 - 1}.]$

c.  $\begin{cases} y' = \frac{t^2 + ty + y^2}{t^2} \\ y(1) = -1 \end{cases}$   $[y(t) = t \tan(\log t - \pi/4).]$

## 1.6 Esercizi vari

1. Si integrino le seguenti equazioni

a.  $x' = -1 - 2x + x^2$

b.  $x(1 + y^2)y' = 3$

$[a. x(t) = 1 - \sqrt{2} \tanh(c + \sqrt{2}t).]$

2. Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale del seguente problema di Cauchy e la si determini:

$$\begin{cases} (y' - 5y)(1 + e^{-5x})^2 = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

3. Si consideri il problema

$$\begin{cases} (x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Si tracci un grafico qualitativo locale della soluzione e si scriva il polinomio di Taylor  $P_2(x)$  del secondo ordine centrato in 1.

$[P_2(x) = 2 + 8(x - 1) - 6(x - 1)^2.]$

4. Si risolva

$$\begin{cases} 2xy^2 - y + xy' = 0 \\ y(2) = 2/5 \end{cases} \quad [y(x) = \frac{x}{x^2+1}.]$$

5. Sia  $a > 0$ . Si consideri

$$\begin{cases} y' = \frac{e^{-y}}{x(x-1)} \\ y(2) = \log a \end{cases}$$

Determinare la soluzione e il più ampio intervallo di definizione della soluzione.

$[y(x) = \log\left(a + \log \frac{2(x-1)}{x}\right).]$

6. Si determini la soluzione massimale del problema

$$\begin{cases} y' = e^{y/x} + \frac{y}{x} \\ y(2) = 0 \end{cases} \quad [y(x) = -x \log\left(1 - \log \frac{x}{2}\right), x \in (0, 2e).]$$

7. Si consideri

$$\begin{cases} y' - 8x^5y + 4x^3y^2 = 2x(1 - 2x^6) \\ y(0) = a \end{cases}$$

- a. si verifichi che l'equazione differenziale ha una soluzione tra i polinomi del secondo ordine;  
 b. si determini la soluzione al variare di  $a \in \mathbb{R}$  e il relativo intervallo massimo di definizione.

8. Si determini, per ogni  $a \in \mathbb{R}$ , la soluzione locale del problema

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 + 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$

Si determini  $a$  tale che la soluzione possa essere definita su tutto  $\mathbb{R}$ .

$$[a = 0, y(x) = x.]$$

9. Si consideri

$$(1 + x^2)y' + 6xy - 3y^{2/3}(1 + x^2) \log(3 + x^2) = 0.$$

- a. Si determini l'integrale generale;  
 b. si provi che per ogni  $y_0 \neq 0$  e per ogni  $x_0$  esiste unica la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1 + x^2)y' + 6xy - 3y^{2/3}(1 + x^2) \log(3 + x^2) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- c.\* si provi che per  $y_0 = 0$  e per ogni  $x_0$  esistono più soluzioni locali del precedente problema di Cauchy. Si usi questo risultato per provare che ogni  $(x_0, y_0)$  il problema di Cauchy ha infinite soluzioni.

$$[a. y(x) = 0 \text{ e } y(x) = \left( \frac{3x(3+x^2) \log(3+x^2) - 2x^3 + c}{9(x^2+1)} \right)^3.]$$

10. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y' + y^2 - 1 = 0 \\ y(2) = k \end{cases}$$

- a. si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale;  
 b. si determini  $k \in \mathbb{R}$  tale che la corrispondente soluzione del problema di Cauchy sia definita su tutto  $(0, \infty)$ .

$$[b. -\frac{e+1}{e-1} \leq k \leq 1.]$$

11. Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale del seguente problema di Cauchy e lo si risolva:

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{(x+1)^2} = x^2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si stabilisca se la soluzione è definita su tutto  $\mathbb{R}$ .

$$[y(x) = e^{\frac{1}{x+1}} \left( e - \int_0^x s^2 e^{\frac{1}{s+1}} ds \right)^{-1}, \text{ no.}]$$

12. Si verifichi che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'' + 2y' = e^{x^2} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \frac{e-1}{2} \end{cases}$$

ha una sola soluzione definita su tutto  $\mathbb{R}$ .

$$[y(x) = \int_1^x \frac{e^{s^2} - 1}{2s^2} ds.]$$

13. Sia  $f_n$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = n(t - y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sia  $f$  il limite puntuale di  $f_n$ . Si stabilisca se  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  in  $[0, \infty)$ .

[Si.]

14. Sia  $f_n$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 t \\ y(1) = \sqrt[n]{2} \end{cases}$$

Si studi la convergenza uniforme di  $f_n$ .

15. Si determini, al variare di  $y_0 \in \mathbb{R}$ , la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(2 - y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

16. Sia

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x+1}y - \frac{1}{x^2-1}\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a. Si provi che per  $y_0 > 0$  fissato esiste unica la soluzione locale del problema e la si determini; è possibile definirla su tutto  $(-1, 1)$ ?

b.\* Per  $y_0 = 0$  si determinino almeno 3 soluzioni definite in  $(-1, 1)$ .

$$[a. \text{ Sol. locale: } y(x) = \left(\frac{\sqrt{y_0 + \log \sqrt{1-x}}}{x+1}\right)^2.]$$

17. Sia

$$\begin{cases} y' + \left(y^2 + y - \frac{3}{4}\right) \cos x = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Si determini  $y_0 \in \mathbb{R}$  tale la soluzione del problema sia definita su tutto  $\mathbb{R}$ .

$$[\frac{2y_0-1}{2y_0+3} \notin [e^{-2}, e^2].]$$

18. Sia  $a \in \mathbb{R}$ . Si determini la soluzione definita nel più ampio intervallo del problema

$$\begin{cases} xy' = y(\log y + 1 - \log x) \\ y(1) = e^a \end{cases}$$

$$[y(x) = xe^{ax} \text{ in } (0, \infty).]$$

19. Sia  $a > 1$  e si consideri

$$\begin{cases} x^2 y' = y^3 - y \\ y(2) = a \end{cases}$$

a. Si provi che esiste unica la soluzione locale  $y_a$  e la si determini.

b. Si provi che esiste  $\alpha > 1$  tale che per ogni  $a \in (1, \alpha]$  la soluzione  $y_a$  può essere definita su tutto  $(0, \infty)$ .

c. Quali soluzioni  $y_a$  possono essere estese su tutto  $\mathbb{R}$ ?

$$[b. \alpha = \sqrt{\frac{e}{e-1}}.]$$

20. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'' \cos^3 x + y' \cos^2 x \sin x = 6 \sin x - 4 \cos^2 x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

- a. Si provi che esiste unica la soluzione locale e la si determini.  
 b. Si determini l'intervallo massimale di definizione.

[b.  $(-\pi/2, \pi/2)$ .]

21. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = e^x \sqrt[3]{1-y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- a. Si studi l'esistenza e l'unicità di soluzioni locali al variare di  $(x_0, y_0)$ .  
 b. Si determinino tutte le soluzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$  nel caso  $(x_0, y_0) = (2, 1)$ .

$$[b. y(x) = 1 \text{ e per ogni } x_0 \leq 2 \text{ anche } y^\pm(x) = \begin{cases} 1 \pm [2(e^{x_0} - e^x)/3]^{3/2} & \text{se } x \leq x_0 \\ 1 & \text{se } x > x_0 \end{cases} ]$$

22. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' - 2y = 2(e^x + x)\sqrt{y} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

- a. Si studi l'esistenza e l'unicità di soluzioni locali;  
 b.\* per  $x_0 = 0$ , si determinino tutte le soluzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

$$[b. \text{ Per ogni } \alpha \text{ sia } g_\alpha(x) = [(\alpha + 1 - \alpha e^\alpha)e^{x-\alpha} + xe^x - x - 1]^2 \text{ e } \beta \text{ tale che } e^\beta + \beta = 0. \text{ Sono soluzioni} \\ y_\alpha(x) = \begin{cases} g_\alpha(x) & \text{se } x \geq \alpha \\ 0 & \text{se } x < \alpha \end{cases} \text{ per } \alpha \geq 0, \quad y_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq \alpha \\ g_\alpha(x) & \text{se } x < \alpha \end{cases} \text{ per } \alpha \leq \beta, \quad y(x) = 0.]$$

23. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{t}y + 4t^2\sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Si determinino tutte le soluzioni locali del problema.

$$[y(x) = 0 \text{ e } \forall \alpha \geq 1 \ y_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \alpha \\ (t(t^2 - \alpha^2))^2 & \text{se } x > \alpha \end{cases} .]$$

24. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Si determinino le 4 soluzioni locali del problema.

25. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x + y + 3) \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

$$[y(x) = -2 \arctan\left(1 + \frac{2}{x-2}\right) - x - 3.]$$

26. Si determinino tutte le soluzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 5y^{4/5} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

27. Si stabilisca per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 - xy}{1 + x^2} \\ y(1) = a \end{cases}$$

ha un massimo o un minimo relativo in  $x = 1$ .

[ $a = 1$  massimo relativo,  $a = 0$  massimo e minimo relativo.]

28. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi \end{cases}$$

nel suo intervallo massimo di definizione.

$$[y(x) = \pi - \arcsin(x+x^2) \text{ in } ((-1-\sqrt{5})/2, (-1+\sqrt{5})/2).]$$

29.\* Si determini il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- per  $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$ , si determinino tutte le soluzioni nel loro intervallo massimo di definizione e ne si tracci un grafico accurato;
- per  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  e per  $(x_0, y_0) = (1/2, -1)$ , si determinino tutte le soluzioni nel loro intervallo massimo di definizione;
- si determinino i punti  $(x_0, y_0)$  tale che l'unica soluzione locale del problema di Cauchy sia  $C^\infty(-1, 1)$ .

$$[a. y(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in (-1, \sqrt{3}/2) \\ 1 & \text{se } x \in [\sqrt{3}/2, 1) \end{cases}; c. x_0 = y_0 \in (-1, 1).]$$

30. Per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-1)(y-4) \frac{\cos x}{\sin x} \\ y(3\pi/2) = 5 \end{cases}$$

- si determini la soluzione locale del problema;
- si determinino tutte le soluzioni definite su  $\mathbb{R}$ .

$$[a. y(x) = \frac{16-|\sin x|^3}{4-|\sin x|^3}.]$$

31. Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si studi l'esistenza e l'unicità di soluzioni in  $C^1(\mathbb{R})$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^3 y' = y - 1 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

[se  $\alpha \neq 1$  non ci sono soluzioni, se  $\alpha = 1$  ce ne sono infinite.]

32. Si stabilisca per quali  $\alpha$  non negativi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy + y^3 = 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

è definita su tutto  $\mathbb{R}$ .

$$[\alpha \in [0, \pi^{-1/4}].]$$

33. Per ogni  $\alpha > 0$  si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4y - 4\sqrt[4]{y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

- verificare che ammette un'unica soluzione locale e determinarla esplicitamente: individuare l'intervallo massimale di definizione della soluzione;
- è possibile prolungare la soluzione a tutto su  $\mathbb{R}$ ? In quanti modi?
- Si consideri ora il caso  $\alpha = 0$ ; quante soluzioni locali ammette il problema di Cauchy?

$$[a. y(x) = ((\alpha^{3/4} - 1)e^{3x} + 1)^{4/3}; b. sempre in modo unico; c. infinite.]$$

34. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y' + 2\sqrt{y'}e^{x/2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si verifichi che ammette un'unica soluzione locale e determinarla esplicitamente: si stabilisca se é possibile prolungare la soluzione su tutto  $\mathbb{R}$  e si determinino tutti i modi possibili.

$$[Una\ sola\ soluzione\ definita\ su\ tutto\ \mathbb{R},\ y(x) = \begin{cases} 2/e - 1 & se\ x \leq -1 \\ e^x(x^2 + 1) - 1 & se\ x > -1 \end{cases}]$$

35. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'ty = t^2 + y^2 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale al variare di  $y_0 \in \mathbb{R}$ ; nel caso  $y_0 = -2$ , si determini la soluzione del problema nell'intervallo massimale.

$$[y(t) = -t\sqrt{2\ln t + 4}\ in\ (e^{-2}, \infty).]$$

## 2 Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

1. Si considerino

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(1/2)t^2+t} \\ -e^{-(1/2)t^2+t} \end{pmatrix} \quad e \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(1/2)t^2+t} + e^{-(1/2)t^2+t} \\ -e^{-(1/2)t^2+t} + e^{(1/2)t^2+t} \end{pmatrix}$$

Esiste un sistema lineare omogeneo avente come soluzioni particolari  $\mathbf{x}$  e  $\tilde{\mathbf{x}}$ ? Se si, lo si scriva.

$$\begin{bmatrix} \{ x_1'(t) = x_1(t) + tx_2(t) \\ x_2'(t) = tx_1(t) + x_2(t) \} \end{bmatrix}$$

2. Siano

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}$$

soluzioni dell'omogenea del sistema  $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)$ . Si determini  $\mathbf{A}(x)$ .

### 2.1 Lineari a coefficienti costanti

1. Si calcolino le matrici  $e^{\mathbf{A}}$  con

a.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

### 2.1.1 Omogenei

1. Si integrino i seguenti sistemi di equazione differenziali

- a.  $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$   $\begin{bmatrix} x(t) = c_1 e^t \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \end{bmatrix}$
- b.  $\begin{cases} x' = -4y \\ y' = x \end{cases}$   $\begin{bmatrix} x(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t \\ y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \end{bmatrix}$
- c.  $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$   $\begin{bmatrix} x(t) = 2c_1 e^t + c_2 e^t(2t + 1) \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 e^t t \end{bmatrix}$
- d.  $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$   $\begin{bmatrix} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^t \\ y(t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^t \end{bmatrix}$
- e.  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$   $\begin{bmatrix} x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ y(t) = c_1 \cos t - c_2 \sin t \end{bmatrix}$
- f.  $\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$
- g.  $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = x - y \end{cases}$
- h.  $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x + 2y \end{cases}$
- i.  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$
- l.  $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

2. Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

- a.  $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = -2y \\ x(0) = 0 \quad y(0) = 1 \end{cases}$   $\begin{bmatrix} x(t) = 3te^{-2t} \\ y(t) = e^{-2t} \end{bmatrix}$

3. Si integrino i seguenti sistemi di equazione differenziali

- a.  $\begin{cases} x' = x + 3y - 2z \\ y' = 2y + 4z \\ z' = y + 2z \end{cases}$   $\begin{bmatrix} x(t) = \frac{2}{3}c_3 e^{4t} - 4c_2 + c_1 e^t \\ y(t) = c_2 + c_3 e^{4t} \\ z(t) = \frac{1}{2}c_3 e^{4t} - \frac{1}{2}c_2 \end{bmatrix}$
- b.  $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \end{cases}$   $\begin{bmatrix} x(t) = c_3 e^t \\ y(t) = \frac{1}{2}e^t(2c_1 \cos(2t) + 2c_2 \sin(2t) - 3c_3 \cos(2t) - 3c_3) \\ z(t) = \frac{1}{2}e^t(2c_1 \sin(2t) - 2c_2 \cos(2t) - 3c_3 \sin(2t) + 2c_3) \end{bmatrix}$
- c.  $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = y + z \\ z' = 0 \end{cases}$   $\begin{bmatrix} x(t) = c_2 e^t + c_1 \\ y(t) = -c_3 + c_2 e^t \\ z(t) = c_3 \end{bmatrix}$
- d.  $\begin{cases} x' = -3x \\ y' = 3y - 2z \\ z' = y + z \end{cases}$

4. Si risolvano i problemi di Cauchy  $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , dove

- a.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll}
\text{c. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} x(t) = 2te^t \\ y(t) = e^t \\ z(t) = 0 \end{bmatrix} \\
\text{d. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 6 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} x(t) = e^{2t} - e^{3t} \\ y(t) = 4e^{2t} - 3e^{3t} \\ z(t) = e^{3t} - e^{2t} \end{bmatrix} \\
\text{e. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} & 
\end{array}$$

### 2.1.2 Non omogenei

A volte può essere utile riscrivere il sistema come un'equazione differenziale di ordine  $n$  e usare il metodo di variazione delle costanti arbitrarie

1. Si integrino i seguenti sistemi di equazione differenziali

$$\begin{array}{ll}
\text{a. } \begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = 2x - 2y \end{cases} & \begin{bmatrix} x(t) = 2c_1e^{2t} + c_2e^{-t} - \frac{3}{2}e^t \\ y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} - e^t \end{bmatrix} \\
\text{b. } \begin{cases} x' = 3x + t \\ y' = y + 1 \\ z' = y + z \end{cases} & \begin{bmatrix} x(t) = c_1e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{t}{3} \\ y(t) = c_2e^t - 1 \\ z(t) = c_2te^t + c_3e^t + 1 \end{bmatrix} \\
\text{c. } \begin{cases} x' = 2x + y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \end{cases} & \\
\text{d. } \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -3x - y - \frac{1}{1 + e^{4t}} \end{cases} & \\
\text{e. } \begin{cases} x' = 3x + y - e^{2t} \\ y' = 2x + 2y - e^{2t} \end{cases} & \begin{bmatrix} x(t) = c_1e^{4t} + c_2e^t + \frac{1}{2}e^{2t} \\ y(t) = c_1e^{4t} - 2c_2e^t + \frac{1}{2}e^{2t} \end{bmatrix} \\
\text{f. } \begin{cases} x' = 2x + y - e^{-2t} + 1 \\ y' = 4x - 2y - e^{-2t} + 3 \end{cases} & \\
\text{g. } \begin{cases} x'_1 = x_2 + t + 1 \\ x'_2 = -x_1 + 2x_2 - 2 \end{cases} & \\
\text{h. } \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 1 \\ x'_2 = 2x_2 - x_3 - 1 \\ x'_3 = 2x_3 \end{cases} & 
\end{array}$$

2.\* Si risolva

$$\begin{cases} tx' = 2x + y + t \\ ty' = x + 2y - t \\ x(e) = e \\ y(e) = -e \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x(t) = t \log t \\ y(t) = -t \log t \end{bmatrix}$$

3. Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Si risolva il sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$  nei casi in cui

$$\text{a. } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b. } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{c. } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

4. Si risolvano

$$\begin{aligned}
\text{a. } & \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - y + \frac{1}{\sin t} \\ x(\pi/2) = 0 \\ y(\pi/2) = \pi \end{cases} & \left[ \begin{array}{l} x(t) = -\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \cos t + \sin t \log(\sin t) \\ y(t) = \left(\frac{\pi}{2} + t\right) (\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \log(\sin t) \end{array} \right] \\
\text{b. } & \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + e^{2t} \\ x'_2 = 2x_2 - x_3 \\ x'_3 = 2x_3 \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1 \end{cases} \\
\text{c. } & \begin{cases} x' = y + \cos t \\ y' = z \\ z' = -2x - y - 2z \\ x(0) = y(0) = 0 \\ z(0) = -1 \end{cases} \\
\text{d. } & \begin{cases} x' = 1234x + 5678y + 9z \\ y' = 5678x + 9y + 1234z \\ z' = 9x + 1234y + 5678z \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

## 2.2 Esercizi vari

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x'_1 = x_1 - 2x_2 + t \\ x'_2 = x_1 - x_2 + \frac{1}{1 + \cos t} \\ x_1(0) = -2 \log 2 \\ x_2(0) = -\log 2 \end{cases} \\
& \left[ \begin{array}{l} x_1(t) = -3 \cos t + \sin t + t + 3 - 2t \sin t - 2 \cos t \log(1 + \cos t) \\ x_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t + t - t \sin t - \cos t \log(1 + \cos t) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

2. Si integri il seguente sistema

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} u' - 4v = \sin x \\ v' - u - 3v = x \end{cases} \\
& \left[ \begin{array}{l} u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - x + \frac{3}{4} + \frac{6}{17} \sin x - \frac{7}{17} \cos x \\ v(x) = \frac{1}{4} (-c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{4x} - 1 + \frac{6}{17} \cos x - \frac{10}{17} \sin x) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

3. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x'_1 = x_2 - x_4 \\ x'_2 = x_1 - x_3 \\ x'_3 = -x_2 + x_4 \\ x'_4 = -x_1 + x_3 \\ x_1(0) = x_4(0) = 1 \\ x_2(0) = x_3(0) = -1 \end{cases} \\
& [x_1(t) = x_4(t) = -x_2(t) = -x_3(t) = e^{-2t}]
\end{aligned}$$

4. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \frac{1}{\cos^3 t} \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases} \\
& \left[ \begin{array}{l} x(t) = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2 \cos^2 t} \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin t + \frac{\sin t}{2 \cos^2 t} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

### 3 Equazioni differenziali di ordine superiore al primo

#### 3.1 Lineari a coefficienti costanti

##### 3.1.1 Metodo di verosimiglianza

1. Si integrino le seguenti equazioni

- |  |  |
|--|--|
| a. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$       | $[y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}, c_i \in \mathbb{R}.]$   |
| b. $y^{(4)} - 3y''' = 0$               | $[y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{3x}, c_i \in \mathbb{R}.]$   |
| c. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$            | $[y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} \cos 3x + c_3 e^{-2x} \sin 3x, c_i \in \mathbb{R}.]$  |
| d. $y^{(6)} - y^{(4)} - y'' + y = 0$   | $[y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + c_5 \cos x + c_6 \sin x, c_i \in \mathbb{R}.]$                                  |
| e. $y'' + 6y' + 9y = 0$                | $[y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}, c_i \in \mathbb{R}.]$  |
| f. $y^{(4)} - 3y''' = x + 1$           | $[y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{3x} - x^3(\frac{x}{72} + \frac{2}{27}), c_i \in \mathbb{R}.]$                                      |
| g. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$       | $[y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 x^2 e^{-2x}, c_i \in \mathbb{R}.]$  |
| h. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$         | $[y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}, c_i \in \mathbb{R}.]$  |
| i. $y''' + y = 0$                      | $[y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x, c_i \in \mathbb{R}.]$ |
| l. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$           | $[y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 \cos x + c_4 \sin x, c_i \in \mathbb{R}.]$  |
| m. $y''' - 3y' + 2y = x^2 e^x$         | $[y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + (\frac{1}{36} x^2 - \frac{1}{27} x + \frac{1}{27}) x^2 e^x, c_i \in \mathbb{R}.]$             |
| n. $y^{(4)} + 2y'' = x^2$              | $[y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos \sqrt{2} x + c_4 \sin \sqrt{2} x + \frac{x^2}{4} (\frac{x^2}{6} - 1), c_i \in \mathbb{R}.]$                |
| o. $3y'' + 8y' + 4y = e^{-x} + \sin x$ | $[y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x} - e^{-x} + \frac{1}{65} \sin x - \frac{8}{65} \cos x, c_i \in \mathbb{R}.]$                   |
| p. $y'' - 2y' + y = x^3 - 6x^2$        | $[y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^3 - 6x - 12, c_i \in \mathbb{R}.]$  |
| q. $y'' - 2y' + y = e^x + e^{2x}$      | $[y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + e^{2x}, c_i \in \mathbb{R}.]$   |
| r. $y'' - 2y' + y = e^x + \sin x$      | $[y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + \frac{1}{2} \cos x, c_i \in \mathbb{R}.]$   |
| s. $y^{(4)} - y = e^x \cos x$          |  |
| t. $y^{(4)} - y = x e^x \sin x$        |  |

2. Si risolvano

- |   |   |
|---|---|
| a. $\begin{cases} y'' + y' = t^2 + 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$   | $[y(t) = -3 + 3t - t^2 + \frac{1}{3} t^3 + 3e^{-t}.]$   |
| b. $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$  | $[y(x) = e^{-x}(e^{-x} - 1 + x).]$  |
| c. $\begin{cases} y''' + 3y'' + 3y' + y = 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 3 \end{cases}$                     | $[y(x) = e^{-x}(1 + x + x^2) + 1.]$   |
| d. $\begin{cases} y''' + 9y' = 2 \cos x - \sin x \\ y(\pi) = -9/8 \\ y'(\pi) = 11/4 \\ y''(\pi) = 73/8 \end{cases}$ | $[y(x) = \frac{1}{8} \cos x + \frac{1}{4} \sin x + \cos(3x) - \sin(3x).]$                       |
| e. $\begin{cases} y''' + 2y'' + 2y' + y = x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$                               | $[y(x) = e^{-x} + e^{-x/2}(\cos(\sqrt{3}x/2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x/2)) + x - 2.]$ |
| f. $\begin{cases} y''' + y'' + y' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$                                 | $[y(x) = 1 - \frac{1}{2}(e^{-x} + \cos x + \sin x).]$   |
| g. $\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 2e^{3x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$  | $[y(x) = \frac{1}{2}(e^{5x} - e^{3x} - 2xe^{3x}).]$   |

3. Si trovi un integrale particolare delle seguenti equazioni

- a.  $y'' - 4y' + 4y = x^{30} e^{2x}$   
 b.  $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = t^{32} e^{-t}$

4. Si scriva una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che abbia per soluzioni particolari tutte le funzioni date

- a.  $y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2, \quad y_4 = e^x$   
 b.  $y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^{2x}, \quad y_3 = e^{2x}x, \quad y_4 = \cos x$   
 c.  $y_1 = e^{-3x} \sin x \cos x, \quad y_2 = e^{-3x} \cos 2x, \quad y_3 = e^{3x}$

5. Per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \alpha \end{cases}$$

verifica la relazione  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = -\infty$ .

[ $\alpha < -1$ .]

### 3.1.2 Con metodo di variazione delle costanti arbitrarie

1. Si integrino le seguenti equazioni

a.  $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$  [ $y(x) = \cos x \log(\cos x) + x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x, c_i \in \mathbb{R}$ .]

b.  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$

c.  $y'' + 2y' + y = \frac{\log x}{e^x}, \quad x > 0$  [ $y(x) = e^{-x} (c_1 + c_2 x + (2 \ln(x) - 3)x^2/4), c_i \in \mathbb{R}$ .]

2. Si risolvano

a.  $\begin{cases} x'' - 4x = \frac{4}{1+e^{4t}} \\ x(0) = -\pi/4 \\ x'(0) = -1 \end{cases}$  [ $x(t) = (\frac{1}{2} - \arctan e^{2t}) \cosh(2t) - \frac{1}{2}$ .]

b.  $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$  [ $y(x) = \frac{\sin^2 x}{2 \cos x}$ .]

c.  $\begin{cases} y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+2} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

d.  $\begin{cases} y'' - y = \frac{1}{\cosh x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

## 3.2 Lineari a coefficienti non costanti

### 3.2.1 Equazioni di Eulero I

1. Si integrino le seguenti equazioni

a.  $x^2 y'' + x y' + y = 1$  [ $y(x) = c_1 \cos \log |x| + c_2 \sin \log |x| + 1, c_i \in \mathbb{R}$ .]

b.  $(1+x)^2 y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$ , per  $x > -1$   
[ $y(x) = (c_1 + c_2 \log(1+x))(1+x)^2 + (1+x)^3, c_i \in \mathbb{R}$ .]

c.  $x^2 y'' - x y' - 3y = 0$  [ $y(x) = c_1 x^3 + c_2 \frac{1}{x}, c_i \in \mathbb{R}$ .]

d.  $x^2 y'' - 4x y' + 6y = x$  [ $y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{1}{2}x, c_i \in \mathbb{R}$ .]

$$e. \quad x^2 y'' + 5xy' + 3y = \frac{1}{x}$$

2. Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy e la si determini:

$$a. \quad \begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad [y(x) = 2x^2(1 - 2 \log x).]$$

$$b. \quad \begin{cases} x^2 y'' - xy' + y = 2x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \quad [y(x) = x(\log x + \log^2 x).]$$

$$c. \quad \begin{cases} x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 3 \\ y''(1) = 6 \end{cases} \quad [y(x) = x^3.]$$

$$d. \quad \begin{cases} x^2 y'' + xy' + 9y = \log(27x) \\ y(e^\pi) = \frac{\log 3}{3} + \frac{\pi}{9} \\ y'(e^\pi) = 0 \end{cases}$$

3. Si risolva in almeno tre modi

$$(3x + 2)y'' + 7y' = 0 \quad [y(x) = c_1 + c_2(3x + 2)^{-4/3}, c_i \in \mathbb{R}.]$$

### 3.2.2 Equazioni di Eulero II (con metodo di variazione delle costanti arbitrarie)

1. Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni

$$a. \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = \cos x, \quad x > 0 \quad [y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 - \cos x}{x^2}, c_i \in \mathbb{R}.]$$

$$b. \quad x^2 y'' + xy' - y = -\frac{x^2}{x+2}, \quad x > 0$$

### 3.3 Esercizi vari

1. Per ogni intero  $n$  positivo, sia  $f_n$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1/n \end{cases}$$

Si studi la convergenza uniforme di  $f_n$ .

[Convergenza uniforme in ogni insieme inferiormente limitato.]

2. Per ogni intero  $n$  positivo, sia  $y_n$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} -\frac{1}{n} y'' + 2y' - 1 = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Si determini il più ampio insieme di convergenza uniforme di  $y_n$ .

$[(-\infty, 0].]$

3. Le funzioni

$$y_1(x) = xe^2 \quad y_2(x) = (x+1)e^x \quad y_3(x) = x(x+e^x)$$

sono integrale particolari di una equazione differenziale del secondo ordine lineare. La si determini.

$$[x(2-x)y'' + (x^2-2)y' + 2(1-x)y + (x^2-4x+2)e^x = 0.]$$

4. Si risolva

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + y = \log x \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases} \quad [y(x) = \cos \log x + \log x.]$$

5. Al variare di  $a \in \mathbb{R}$  si determini l'integrale generale di

$$x^{(iv)} + (1-a)x''' - ax'' = (t+1)$$

6. Al variare di  $a \in \mathbb{R}$  si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^3 z''' + (3-a)x^2 z'' + (1-a+a^2)xz' - a^3 z = \log x \\ z(1) = z'(1) = 0 \\ z''(1) = 1 \end{cases}$$

$$[se\ a = 0, z(x) = \ln^2 x + \frac{1}{24} \ln^4 x; se\ a \neq 0, z(x) = \frac{a^2+1}{2a^4} x^a - \frac{a^2-1}{2a^4} (\sin(a \ln x) + \cos(a \ln x)) - \frac{1}{a^3} \ln x - \frac{1}{a^4}.]$$

7. Determinare due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale

$$x^2 y'' + 4xy' + (2+x^2)y = 0$$

nell'intervallo  $(0, \infty)$ , cercandole nella famiglia  $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$ . Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'' + 4xy' + (2+x^2)y = x^2 \\ y(\pi) = y'(\pi) = 1 \end{cases} \quad [y(x) = (-\pi^2 \sin x - 2 \cos x + x^2 - 2)/x^2.]$$

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2y = 0 \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$

- Si stabilisca al variare di  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  l'esistenza e l'unicità locale della soluzione  $y_{a,b}$  e, quando possibile, la si determini.
- Si determinino  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  in modo tale che  $y_{a,b}$  possa essere definita su tutto  $\mathbb{R}$ .
- Si determinino, al variare di  $c \in \mathbb{R}$ , tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2y = 0 \\ y(0) = c \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad [a. y_{a,b}(x) = \frac{1}{3} \left( (a+b)x^2 + \frac{2a-b}{x} \right).]$$

9. Si determini l'integrale generale della seguente equazione

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3 e^{2x}$$

cercando per l'equazione dell'omogenea associata soluzioni della forma  $y(x) = e^{\alpha x}$  e  $y(x) = x^3 e^{\beta x}$ .

$$[y(x) = (c_1 + c_2 x^3)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^{2x}, c_i \text{ costanti}.]$$

10. Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2 y'' - xy' - 8y = -6x^4$$

- Si determinino tutte le soluzioni definite in  $(-\infty, 0)$  e in  $(0, \infty)$ ;
- si determinino tutte le soluzioni che sono in  $C^2(\mathbb{R})$  e con un punto stazionario in  $x = 1/2$ .

$$[b. y(x) = \begin{cases} (-\log 2 + 1/4 - \log x)x^4 & se\ x \geq 0 \\ (c - \log |x|)x^4 & se\ x < 0 \end{cases} \text{ per ogni costante } c.]$$

11. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - x' + 2e^{-t} = 0 \\ x' - y' - y + 2te^t = 0 \\ x(0) = y(0) = 0 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) = e^t - e^{-t} \\ y(t) = t(e^t + e^{-t}) \end{bmatrix}$$

12. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{1 + \sin^2 x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$[y(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos x \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{2} + \cos x}{\sqrt{2} - \cos x} \right) - \ln \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) \right] + \sin x [1 + \arctan(\sin x)]]$$

13. Si risolva il problema

$$\begin{cases} x^2 y'' - xy' + y = x^2 \log |x| \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

14. Si consideri il problema

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 4y = \frac{x^3}{2} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

a. Si discuta l'esistenza e l'unicità locale della soluzione del problema;

b. si determinino tutte le soluzioni del problema di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

$$[b. y(x) = cx^2 + x^3/2, c \in \mathbb{R}]$$

15. Si determini l'integrale generale di

$$\begin{cases} 4x'' + x + y = \sin t \\ y' + x + y = \cos t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t/2} + c_3 - \frac{4}{25} \sin t + \frac{3}{25} \cos t \\ y(t) = (4c_2 - 2c_1 - 2c_2 t)e^{-t/2} - c_3 + \frac{13}{25} \sin t + \frac{9}{25} \cos t \end{bmatrix}$$

16. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x} \\ y(0) = -1/2 \\ y'(0) = 1/2 - \log 2 \end{cases}$$

$$[y(x) = (e^x (x - \log(1 + e^x)) + e^{-x} \log(1 + e^x) - 1)/2.]$$

17. Si consideri l'equazione differenziale

$$25x^2 y'' + 25xy' - 36y = 3x.$$

a. Determinare le soluzioni definite su  $(0, \infty)$  che ammettono asintoto obliquo a  $+\infty$ ;

b. determinare le soluzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

$$[a. y(x) = -\frac{3}{11}x + cx^{-6/5}; b. y(x) = -\frac{3}{11}x.]$$

18. Si determinino tutte le sue soluzioni locali di

$$\begin{cases} x^2 y'' - 20y = 9x^7 - 3x^2 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$[y(x) = \begin{cases} \frac{9}{22}x^7 + \frac{1}{6}x^2 + c_1x^5 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{9}{22}x^7 + \frac{1}{6}x^2 + c_2x^5 & \text{se } x < 0 \end{cases} \text{ per ogni } c_i \in \mathbb{R}.]$$