Analisi Matematica II
corso di Laurea in Matematica
prove scritte, a.a. 2016/2017

Prima prova parziale, seconda parte, 2 dicembre 2016

Versione A

Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, xy > -1\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x| \log(1+xy)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Si stabilisca in quali punti di Ω la funzione f è differenziabile.

Versione B

Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, xy < 1\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y| \log(1-xy)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Si stabilisca in quali punti di Ω la funzione f è differenziabile.

Versione C

Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2+y^2 < 1\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy|y|}{\log(1-(x^2+y^2))}, & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Si stabilisca in quali punti di Ω la funzione f è differenziabile.

Versione D

Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 1\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{yx|x|}{\log(1 - x^2 - y^2)}, & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Si stabilisca in quali punti di Ω la funzione f è differenziabile.

Seconda prova parziale e prova di recupero, seconda parte, 30 gennaio 2017

Versione A

Si calcoli il volume (misura di Peano-Jordan 3-dimensionale) dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 6 \text{ e } z \geq \sqrt[4]{x^2 + y^2} \right\} .$$

Versione B

Si calcoli il volume (misura di Peano-Jordan 3-dimensionale) dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 6 \text{ e } y \geq \sqrt[4]{x^2 + z^2} \right\} .$$

Terza prova parziale, 16 giugno 2017

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & \text{se } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, si definisca $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_n(x) = n^\alpha f(x - n)$.

(i) Si determinino, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni h_n.

(ii) Si determinino, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$.

2. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^t \sin^4 t.$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} x + e^y \arctan y, & \text{se } |y| > x^2, \\ x^2 + y^2, & \text{se } |y| \leq x^2. \end{cases}$$

Si discutano continuità, derivabilità direzionale e differenziabilità di f in $(0, 0)$.

4. Sia γ una curva regolare semplice e chiusa con sostegno

$$\gamma^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 = 2 \text{ e } x + z = 0\},$$

orientata in senso antiorario se vista dall'alto. Si consideri su $\mathbb{R}^3$ la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = (y^3 + \arctan x + 3x^2 z - z)\, dx + (z + \sin y - \log(1 + y^4) + 3xy^2)\, dy + (z^5 + x^3)\, dz.$$

Usando il Teorema di Stokes, si calcoli $\int_\gamma \omega$.

30 gennaio 2017

1. Per $\alpha > 0, \beta > 0$, sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|^\beta |x|^\alpha}{\sqrt{x^4+2y^4}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Si discuta, al variare di $\alpha, \beta \in (0,+\infty)$, la continuità di f in $(0,0)$.

(ii) Si discuta, al variare di $\alpha, \beta \in (0,+\infty)$, la differenziabilità di f in $(0,0)$.

2. Si calcolino i seguenti integrali:

(i) $\displaystyle\int_\Omega \big(y|x|\log(x^2+y^2) + y^2 \arctan x\big)\, dx\, dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \text{ e } x^2 + \frac{y^2}{9} < 1\right\};$$

(ii) $\displaystyle\int_T \frac{x}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, dove T è il triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,1)$ e $(2,2)$.

3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(t,x,y) = (t^2 + xy + 1, tx + y^2 - 1)$.

(i) Si verifichi che, in un intorno del punto $(0,-1,1)$, la relazione $F(t,x,y) = (0,0)$ definisce implicitamente due funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$.

(ii) Si determini il versore $T^*_\gamma(0,-1,1)$ tangente alla curva $\gamma(t) = (t, x(t), y(t))$ nel punto $(0,-1,1)$

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x(x-1)\log\big(2 - y^2(x)\big), \\ y(0) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

(i) Si dimostri che $(*)$ ammette un'unica soluzione in grande $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Si stabilisca se esistono i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x)$ e, in caso di risposta affermativa, li si determini.

(iii) Si disegni un grafico qualitativo di φ.

16 giugno 2017

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & \text{se } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, si definisca $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_n(x) = n^\alpha f(x-n)$.

(i) Si determinino, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni h_n.

(ii) Si determinino, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$.

2. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^t \sin^4 t.$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} x + e^y \arctan y, & \text{se } |y| > x^2, \\ x^2 + y^2, & \text{se } |y| \leq x^2. \end{cases}$$

Si discutano continuità, derivabilità direzionale e differenziabilità di f in $(0,0)$.

4. Sia γ una curva regolare semplice e chiusa con sostegno

$$\gamma^* = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 = 2 \text{ e } x + z = 0\},$$

orientata in senso antiorario se vista dall'alto. Si consideri su $\mathbb{R}^3$ la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = (y^3 + \arctan x + 3x^2 z - z)\,dx + (z + \sin y - \log(1+y^4) + 3xy^2)\,dy + (z^5 + x^3)\,dz.$$

Usando il Teorema di Stokes, si calcoli $\int_\gamma \omega$.

30 giugno 2017

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si consideri $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_n(x) = x^n - n \arctan\left(\frac{x^n}{n}\right).$$

(i) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni f_n.

(ii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

(iii) Si studi il limite $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx$.

2. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2 \text{ e } y^2 - x^2 \geq 1\}$. Si calcoli

$$\int_{\Omega} \frac{x}{y}\, dx\, dy.$$

3. Siano $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$ e $f : U \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} y - \dfrac{1}{2}xy^2, & \text{se } (x,y) \in U \text{ e } x \geq 0, \\ \dfrac{\log(1+xy)}{x}, & \text{se } (x,y) \in U \text{ e } x < 0. \end{cases}$$

Si stabilisca in quali punti di U la funzione f risulta differenziabile.

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{e^{-y(x)} - e^{y(x)}}{y(x) - 2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(i) Si discutano esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni.

(ii) Si studino le proprietà di monotonia, l'esistenza di punti di massimo/minimo e il comportamento ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

(iii) Si disegni un grafico qualitativo delle soluzioni.

21 luglio 2017

1. Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_n(x) = \sqrt{n}\, e^{nx} \left[\sin\left(\frac{e^{nx}}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{e^{nx}}{n}\right) \right].$$

(i) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni f_n.

(ii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. Si calcoli

$$\int_A \left(y|x^3 + \arctan x| + \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right) dx\, dy.$$

3. Si trovino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ vincolata all'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 = 1 \text{ e } x^4 + z^4 = 1\}.$$

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{|\cos(y(x))|}{(1 + x^2)y(x)}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(i) Si discutano esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni.

(ii) Si studino le proprietà di monotonia, l'esistenza di punti di massimo/minimo e il comportamento ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

(iii) Si disegni un grafico qualitativo delle soluzioni.

4 settembre 2017

1. Al variare del parametro $p > 0$, si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \exp\left[-n^p\left(x + \frac{1}{n}\right)^2\right].$$

2. Si calcoli l'integrale

$$\int_E \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy,$$

dove $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 1, \, y \leq 1 - \sqrt{3}|x|\right\}$.

3. Siano $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \neq 0\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y, z) = x + y + z + \frac{1}{|xyz|}.$$

1. Si determinino i punti stazionari di f e se ne discuta la natura (si stabilisca cioè, per ciascun punto stazionario, se si tratta di un punto di massimo locale, di minimo locale o di sella).
2. Si dica se f assume massimo e minimo assoluti in Ω.

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x\, y^2(x) + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Si discutano esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni; si studino inoltre le proprietà di monotonia, l'esistenza di punti di massimo/minimo e il comportamento ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.
2. Si disegni un grafico qualitativo delle soluzioni.