Analisi Matematica II

corso di Laurea in Matematica

prove scritte, a.a. 2015/2016

## Prima prova parziale, seconda parte, 4 dicembre 2015

### Versione A

(i) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (1+x^2)^{-\frac{n}{2}} x^{n-1}.$$

(ii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = n(1+x^2)^{-\frac{n}{2}} \log(1+|x|).$$

(iii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) = (1+x^2)^{-\frac{n}{2}} \big(x^{n-1} + n\log(1+|x|)\big).$$

### Versione B

(i) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n(1+x^2)^{-\frac{n}{2}} \log(1+|x|).$$

(ii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = (1+x^2)^{-\frac{n}{2}} x^{n-1}.$$

(iii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) = (1+x^2)^{-\frac{n}{2}} \big(x^{n-1} + n\log(1+|x|)\big).$$

## Seconda prova parziale, seconda parte, 15 febbraio 2016

### Versione A

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-x^3} \sin(y(x)), \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(i) Si discutano esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni.

(ii) Si studino le proprietà di monotonia, l'esistenza di punti di massimo/minimo e il comportamento ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

(iii) Si disegni un grafico qualitativo delle soluzioni.

### Versione B

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-x^3} \sin(y(x)), \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

(i) Si discutano esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni.

(ii) Si studino le proprietà di monotonia, l'esistenza di punti di massimo/minimo e il comportamento ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

(iii) Si disegni un grafico qualitativo delle soluzioni.

## Terza prova parziale, 27 maggio 2016

**1.** Si scriva l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

**2.** Si trovino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = e^{-(x^2-y+z^2)}$$

vincolata all'insieme

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 = 1\right\}.$$

**3.** Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri la forma differenziale

$$\omega_{\alpha,\beta}(x,y,) = \frac{\alpha x - \beta y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{\alpha y + \beta x}{x^2+y^2}\,dy$$

nell'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(i) Si stabilisca per quali valori di $\alpha$ e $\beta$ la forma $\omega_{\alpha,\beta}$ è chiusa in $\Omega$.

(ii) Si stabilisca per quali valori di $\alpha$ e $\beta$ la forma $\omega_{\alpha,\beta}$ è esatta in $\Omega$ e, per tali valori, se ne determini una primitiva.

## 15 febbraio 2016

**1.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |(1-e^x)(y-x^2)|$.

(i) Si stabilisca in quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $f$ è differenziabile.

(ii) Si discuta l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|\big|y-\sin(x^2)\big|}.$$

**2.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-x^3}\sin(y(x)), \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

(i) Si discutano esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni.

(ii) Si studino le proprietà di monotonia, l'esistenza di punti di massimo/minimo e il comportamento ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

(iii) Si disegni un grafico qualitativo delle soluzioni.

**3.** Si trovino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = z$ vincolata all'insieme

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+4z^2 = 4 \text{ e } x^2+y^2-z^2-2y = 0\}.$$

**4.** Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2 \leq 1 \text{ e } y \geq |x|\}$. Si calcoli l'integrale

$$\int_\Omega \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy.$$

## 27 maggio 2016

**1.** Si trovino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = e^{-(x^2-y+z^2)}$$

vincolata all'insieme

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 = 1\right\}.$$

**2.** Sia $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (1 - \sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 \leq 1\right\}$.

(i) Si calcoli il volume di $A$.

(ii) Si calcoli $\int_A (z^2 + \arctan y)\, dx\, dy\, dz$.

**3.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(y^3 + xy^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Si stabilisca se $f$ è continua in $(0,0)$.

(ii) Si stabilisca se esistono le derivate parziali di $f$ in $(0,0)$.

(iii) Si stabilisca se $f$ è differenziabile in $(0,0)$.

**4.** Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri la forma differenziale

$$\omega_{\alpha,\beta}(x,y,) = \frac{\alpha x - \beta y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{\alpha y + \beta x}{x^2+y^2}\, dy$$

nell'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(i) Si stabilisca per quali valori di $\alpha$ e $\beta$ la forma $\omega_{\alpha,\beta}$ è chiusa in $\Omega$.

(ii) Si stabilisca per quali valori di $\alpha$ e $\beta$ la forma $\omega_{\alpha,\beta}$ è esatta in $\Omega$ e, per tali valori, se ne determini una primitiva.

## 27 giugno 2016

**1.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{e^{y^2(x)} - 1}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{$*$}$$

(i) Si dimostri che $(*)$ ammette un'unica soluzione e se ne discutano la prolungabilità e il comportamento ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza.

(ii) Si disegni un grafico qualitativo della soluzione.

**2.** Si trovino i punti di massimo e di minimo locali e globali della funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |xy|(x^2 + y^2 - x).$$

**3.** Sia $\Sigma$ l'insieme ottenuto ruotando di un giro completo intorno all'asse $z$ l'insieme

$$\left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : yz = 1 \text{ e } \frac{1}{2} \le z \le 1 \right\}.$$

(i) Si determini una superficie regolare $\varphi$ con sostegno $\varphi^* = \Sigma$ e se ne calcoli l'area.

(ii) Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, \log(1 + x^2 + y^2) + \arctan(xyz) \right),$$

si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie.

**4.** Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\left( \frac{|\sin x|^n}{1 + x^{2n}} \right).$$

## 20 luglio 2016

**1.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \, n^{2x}$.

(i) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}_n$.

(ii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

**2.** Per $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x(y - x)|^\alpha$.

(i) Si stabilisca, al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$, in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione $f$ ammette derivate parziali.

(ii) Si stabilisca, al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$, in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione $f$ è differenziabile.

**3.** Si calcoli il volume dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{1 - z^2} \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}.$$

**4.** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) Si calcoli $e^{tA}$.

(ii) Si scriva l'integrale generale del sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^t, \\ \dot{y} = -3x + y - 3z + 3 \\ \dot{z} = x + 2z. \end{cases}$$

## 8 settembre 2016

**1.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 4^n \left( x^{2^n} - x^{2^{n+1}} \right)$.

(i) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}_n$.

(ii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

**2.** Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y^2 \leq x^2(x^2 + y^2)^2\}$.

(i) Si determini $\Psi^{-1}(A)$, dove $\Psi : [0, +\infty) \times [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $\Psi(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$.

(ii) Si calcoli l'area di $A$.

(iii) Si calcoli $\int_A (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

**3.** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = z\, e^{z^2} + \log(1 + x^2 + y^2)$.

(i) Si verifichi che, in un intorno del punto $(0, 0, 0)$, la relazione $F(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $z = f(x, y)$.

(ii) Si verifichi che $(x, y) = (0, 0)$ è un punto di massimo globale per $f$.

**4.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x^2 + y(x)}{1 + x^2 + y^2(x)}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{$*$}$$

(i) Si dimostri che $(*)$ ammette un'unica soluzione in grande $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Si stabilisca se esistono i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x)$ e, in caso di risposta affermativa, li si determini.