Analisi Matematica II
corsi di Laurea in Fisica e Matematica
prove scritte, a.a. 2013/2014

Prima prova parziale, 3 dicembre 2013

Versione A

1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx} \arctan(n^{|x|})}{1 + e^{-nx}}.$$

(i) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni f_n.

(ii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

2. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ x \geq 0, \ x^{4/3} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(i) Si determini $\Psi^{-1}(A)$, dove $\Psi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\Psi(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$.

(ii) Si calcoli $\int_A \left(1 - (x^2 + y^2)^{1/4}\right) \, dx \, dy$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - y(x + z)$.

(i) Si determinino i punti stazionari di f e se ne discuta la natura (si stabilisca cioè, per ciascun punto stazionario, se si tratta di un punto di massimo locale, di minimo locale o di sella).

(ii) Si dica se f assume massimo e minimo assoluti in $\mathbb{R}^3$.

4. Per $\alpha \in (0, 1)$ sia

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x}, & \text{se } |x|^\alpha > |y|^{1-\alpha}, \\ 0, & \text{se } |x|^\alpha \leq |y|^{1-\alpha}. \end{cases}$$

(i) Si studino in $(0, 0)$ la continuità e la derivabilità parziale di f_α al variare di $\alpha \in (0, 1)$.

(ii) Si studi la differenziabilità di f_α in $(0, 0)$ al variare di $\alpha \in (0, 1)$.

Versione B

1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{2 + e^{nx}} \arctan(n^{|x|}).$$

(i) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni f_n.

(ii) Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

2. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ x \geq 0, \ y^{4/3} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(i) Si determini $\Psi^{-1}(A)$, dove $\Psi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\Psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

(ii) Si calcoli $\int_A \left((x^2 + y^2)^{1/4} - 1\right) \, dx \, dy$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x(y + z)$.

(i) Si determinino i punti stazionari di f e se ne discuta la natura (si stabilisca cioè, per ciascun punto stazionario, se si tratta di un punto di massimo locale, di minimo locale o di sella).

(ii) Si dica se f assume massimo e minimo assoluti in $\mathbb{R}^3$.

4. Per $\alpha \in (0, 1)$ sia

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & \text{se } |x|^\alpha < |y|^{1-\alpha}, \\ 0, & \text{se } |x|^\alpha \geq |y|^{1-\alpha}. \end{cases}$$

(i) Si studino in $(0, 0)$ la continuità e la derivabilità parziale di f_α al variare di $\alpha \in (0, 1)$.

(ii) Si studi la differenziabilità di f_α in $(0, 0)$ al variare di $\alpha \in (0, 1)$.

Seconda prova parziale, 5 febbraio 2014

Versione A

1.

(i) Si scriva l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}.$$

(ii) Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. Si trovino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = z - 2\arctan(y + z)$ vincolata all'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x\Big(\dfrac{\pi}{3} - \arctan y(x)\Big), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che ammette un'unica soluzione φ definita su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Si dimostri che esistono i limiti $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x)$ e li si calcoli.

(iii) Si discuta l'esistenza di punti di flesso di φ.

(iv) Si disegni un grafico qualitativo di φ.

4. Nell'aperto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 > 0\}$ di $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = yz\,dx + \left(y + xz + \frac{y - z}{y^2 + z^2}\right) dy + \left(xy + \frac{y + z}{y^2 + z^2}\right) dz.$$

(i) Si stabilisca se ω è chiusa in Ω.

(ii) Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è la curva definita come $\gamma(t) = (0, \cos t, \sin t)$.

(iii) Si stabilisca se ω è esatta in Ω.

Versione B

1.

(i) Si scriva l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x}.$$

(ii) Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \dfrac{1}{1 + \cos^2 x}, \\ y(0) = \frac{\pi}{4}, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Si trovino i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = 2\arctan(x+y) - y$ vincolata all'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x\Big(\dfrac{\pi}{3} - \arctan y(x)\Big), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che ammette un'unica soluzione φ definita su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Si dimostri che esistono i limiti $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ e li si calcoli.

(iii) Si discuta l'esistenza di punti di flesso di φ.

(iv) Si disegni un grafico qualitativo di φ.

4. Nell'aperto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 > 0\}$ di $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = \left(x + yz + \frac{x - z}{x^2 + z^2}\right) dx + xz\, dy + \left(xy + \frac{x + z}{x^2 + z^2}\right) dz.$$

(i) Si stabilisca se ω è chiusa in Ω.

(ii) Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è la curva definita come $\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t)$.

(iii) Si stabilisca se ω è esatta in Ω.

5 febbraio 2014

Versione A

1. Per $n \geq 1$, sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_n(x) = \sqrt{n} \log \left(\frac{1 + x + nx^2}{1 + nx^2} \right).$$

(i) Si studino la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni f_n in $\mathbb{R}$.

(ii) Si studino la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

(iii) Quanto vale $\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 f_n(x)\, dx$?

2. Si calcoli

$$\int_D (x + \sin y)\, dx\, dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } |y| \leq \log(1 + x^2)\}$

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x\Big(\dfrac{\pi}{3} - \arctan y(x)\Big), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che ammette un'unica soluzione φ definita su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Si dimostri che esistono i limiti $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ e li si calcoli.

(iii) Si discuta l'esistenza di punti di flesso di φ.

(iv) Si disegni un grafico qualitativo di φ.

4. Nell'aperto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 > 0\}$ di $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = yz\, dx + \left(y + xz + \frac{y - z}{y^2 + z^2} \right) dy + \left(xy + \frac{y + z}{y^2 + z^2} \right) dz.$$

(i) Si stabilisca se ω è chiusa in Ω.

(ii) Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è la curva definita come $\gamma(t) = (0, \cos t, \sin t)$.

(iii) Si stabilisca se ω è esatta in Ω.

Versione B

1. Per $n \geq 1$, sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_n(x) = \sqrt{n}\,\log\left(\frac{nx^2 - x + 2}{2 + nx^2}\right).$$

(i) Si studino la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni f_n in $\mathbb{R}$.

(ii) Si studino la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

(iii) Quanto vale $\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 f_n(x)\,dx$?

2. Si calcoli

$$\int_D (x + \tan y)\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } |y| \leq \log(1 + x^2)\}$

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x\Big(\dfrac{\pi}{3} - \arctan y(x)\Big), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che ammette un'unica soluzione φ definita su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Si dimostri che esistono i limiti $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ e li si calcoli.

(iii) Si discuta l'esistenza di punti di flesso di φ.

(iv) Si disegni un grafico qualitativo di φ.

4. Nell'aperto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 > 0\}$ di $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = \left(x + yz + \frac{x - z}{x^2 + z^2}\right) dx + xz\,dy + \left(xy + \frac{x + z}{x^2 + z^2}\right) dz.$$

(i) Si stabilisca se ω è chiusa in Ω.

(ii) Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è la curva definita come $\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t)$.

(iii) Si stabilisca se ω è esatta in Ω.

20 febbraio 2014

Versione A

1. Sia f il prolungamento periodico di periodo 2π della funzione

$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{se } x \in [-\pi, 0], \\ \pi, & \text{se } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

(i) Si calcolino i coefficienti di Fourier di f.

(ii) Si scriva la serie di Fourier di f e se ne discutano convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$.

2. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto ruotando di un giro completo intorno all'asse y il sostegno della curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, 1 - t, 0)$.

(i) Si determini una superficie regolare φ con sostegno $\varphi^* = \Sigma$ e si calcoli $\int_\varphi (x^2 + y^2)\, d\sigma$.

(ii) Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}(x, y, z) = \left(z + \arctan y, \frac{x^5}{1 + z^2}, x^2 z e^{y^2} \right),$$

si calcoli $\int_\varphi \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu}\, d\sigma$, dove $\boldsymbol{\nu}(x, y, z)$ denota il versore normale alla superficie φ nel punto (x, y, z) (orientato in modo da avere seconda componente positiva).

3. Per $\alpha > 0$ sia

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 + \sin(|x|^\alpha y) - \cos(x^2 + y^4)}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(i) Si discutano la continuità e la derivabilità parziale di f_α in $(0, 0)$ al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.

(ii) Si studi la differenziabilità di f_α in $(0, 0)$ al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.

4. Per ogni $\alpha > 0$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + \log(y(x)), \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che se $\alpha < e^{-1}$ il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione il cui intervallo massimale di esistenza è una semiretta; si calcolino inoltre i limiti della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

(ii) Si dimostri che se $\alpha > e^{-1}$ il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$; si calcolino inoltre i limiti della soluzione $y(x)$ per $x \to \pm\infty$.

Versione B

1. Sia f il prolungamento periodico di periodo 2π della funzione

$$x \mapsto \begin{cases} -\pi, & \text{se } x \in [-\pi, 0], \\ x, & \text{se } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

(i) Si calcolino i coefficienti di Fourier di f.

(ii) Si scriva la serie di Fourier di f e se ne discutano convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$.

2. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto ruotando di un giro completo intorno all'asse y il sostegno della curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (0, t, 1-t)$.

(i) Si determini una superficie regolare φ con sostegno $\varphi^* = \Sigma$ e si calcoli $\int_\varphi (y^2 + z^2)\, d\sigma$.

(ii) Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}(x,y,z) = \left(xz^2 e^{y^2}, \frac{x^7}{5+z^6}, x + \sin y \right),$$

si calcoli $\int_\varphi \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu}\, d\sigma$, dove $\boldsymbol{\nu}(x,y,z)$ denota il versore normale alla superficie φ nel punto (x,y,z) (orientato in modo da avere seconda componente positiva).

3. Per $\alpha > 0$ sia

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x^4 + y^2) + \sin(x|y|^\alpha)}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Si discutano la continuità e la derivabilità parziale di f_α in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.

(ii) Si studi la differenziabilità di f_α in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.

4. Per ogni $\alpha > 0$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + \log(y(x)), \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che se $\alpha < e^{-1}$ il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione il cui intervallo massimale di esistenza è una semiretta; si calcolino inoltre i limiti della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

(ii) Si dimostri che se $\alpha > e^{-1}$ il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$; si calcolino inoltre i limiti della soluzione $y(x)$ per $x \to \pm\infty$.

23 aprile 2014

1. Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \text{ and } z \geq 1\}$. Si calcoli

$$\int_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

2.

(i) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, si determini e^{tA}.

(ii) Si scriva l'integrale generale del sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - y + e^t, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = x^2 - \sqrt{e^{(xy)^2} - 1}.$$

(i) Si discutano la continuità, la derivabilità parziale e la differenziabiità di f.

(ii) Si determinino i punti di massimo e di minimo (locale e globale) di f su $\mathbb{R}^2$.

4. Si dica se esistono valori di $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che la forma differenziale

$$\omega_k : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (\mathbb{R}^2)^\star, \quad \omega_k(x, y) = \frac{2xy}{x^{2k} + y^2}\, dx - \frac{x^2}{x^{2k} + y^2}\, dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. In caso di risposta affermativa, per tali valori si determini una primitiva.

19 giugno 2014

1. Si determinino i punti di massimo e di minimo (locale e globale) della funzione

$$f(x, y) = \arctan(x^4 - y^4)$$

sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Sia Σ la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la circonferenza sul piano yz di centro $(0, 2, 0)$ e raggio 1. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}\ \mathbf{i} + \arctan(x + z)\ \mathbf{j} + \frac{(z + 1)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ \mathbf{k}$$

uscente da Σ.

3.

(i) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si discutano esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y + 1)e^{-y}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(ii) Si studi il comportamento delle soluzioni ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza.

(iii) Si studino le proprietà di convessità/concavità delle soluzioni e si discuta l'esistenza di eventuali punti di flesso.

(iv) Si tracci il grafico qualitativo delle soluzioni per alcuni valori significativi di α.

4. Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come $f_n(x) = x^{-n} \log(1 + x^n)$.

17 luglio 2014

1.

(i) Sia $f(x,y) = y^3 + e^x + \log(1+(x-y)^2)$. Si dimostri che $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\}$ in un intorno di $(0,0)$ coincide con il grafico di una funzione $x = g(y)$.

(ii) Si scriva lo sviluppo di Taylor del secondo ordine (con il resto di Peano) di g centrato in $y = 0$.

(iii) Si verifichi che $y = 0$ è un punto di massimo locale per g.

2. Si calcoli $\iiint_E z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^4 \le 4,\ \frac{1}{3}(x^2+y^2) \le z^2 \le 3(x^2+y^2) \text{ e } z \ge 0\right\}.$$

3. Per ogni $\alpha > 0$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \log(x + y(x)), \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \qquad (P_\alpha)$$

Si stabilisca per quali valori di $\alpha \in (0,+\infty)$ il problema (P_α) ammette un'unica soluzione y_α prolungabile a tutto $\mathbb{R}$. Per tali valori di α si calcolino inoltre i limiti della soluzione $y_\alpha(x)$ per $x \to \pm\infty$ e si discuta l'esistenza di asintoti.

4. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ sia

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \cos x, & \text{se } y \neq 0, \\ 0, & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

(i) Si determini, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui f_α è continua.

(ii) Si determini, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui f_α è derivabile parzialmente.

(iii) Si determini, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui f_α è differenziabile.

12 settembre 2014

1. Si scriva l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \frac{e^t}{1+e^t}.$$

2. Si calcoli $\iint_A y \, dx \, dy$ dove

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y \geq 0\Big\}.$$

3.

(i) Si dimostri che il luogo degli zeri della funzione

$$F : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = (1-y)e^x - (x^2 + x + 1)\log(2y)$$

coincide con il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nella variabile x.

(ii) Si dimostri che $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Si discuta l'esistenza di punti di massimo/minimo locale di f e si studino i limiti di f per $x \to \pm\infty$.

(iv) Si tracci un grafico qualitativo di f.

4. Si determinino, al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$, gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n} + \cos x)^2}{n^\alpha x^n}, \quad x \in (0, +\infty).$$