Note di matematica
Come disegnare l'iperbole equilatera associata a una data funzione omografica

Giuseppe Vittucci Marzetti*

15 ottobre 2021

Il procedimento generale è il seguente:

1. ricondurre la funzione alla forma:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

   dove a, b, c e d sono costanti reali;

2. calcolare le coordinate del centro di simmetria C dell'iperbole sapendo che queste sono date da:

$$(x_c, y_c) = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

3. disegnare gli asintoti orizzontali e verticali dell'iperbole che passano per il centro di simmetria C;

4. dare un valore arbitrario ad x per ottenere il relativo valore di y, sapendo che uno dei rami dell'iperbole passerà per quel punto. Ed eventualmente altri valori di x più o meno "vicini" a quello, per farsi un'idea migliore della curvatura del ramo dell'iperbole che si sta considerando;

5. disegnare l'altro ramo dell'iperbole in modo simmetrico rispetto al centro di simmetria rispetto al ramo in precedenza disegnato.

Per capire meglio quanto detto sopra facciamo un esempio. Se si ha la funzione:

$$f(x) = 7 \cdot \frac{x}{2(x+1)} - 3$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126 Milano, Tel.: +39 02 64487457, Fax: +39 02 64487561. Email: giuseppe.vittucci@unimib.it

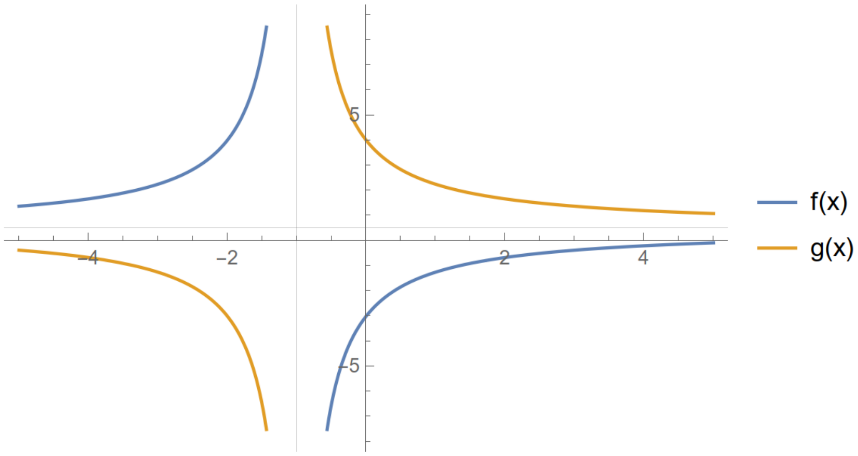

Figura 1: Grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$

occorre prima trasformarla come segue:

$$f(x) = 7 \cdot \frac{x}{2(x+1)} - 3 = \frac{7x - 3(2x+2)}{2x+2} = \frac{x-6}{2x+2}$$

In questo modo risulta chiaro che è una funzione omografica, per cui $a = 1$, $b = -6$, $c = 2$ e $d = 2$.

Il centro di simmetria dell'iperbole equilatera associata avrà pertanto coordinate:

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

A questo punto, dato il centro di simmetria C, si hanno solo due possibilità: i due rami dell'iperbole (perfettamente simmetrici rispetto agli assi di simmetria dell'iperbole) possono trovarsi o in alto a destra e in basso a sinistra, oppure in alto a sinistra e in basso a destra. Determinare un punto a caso ci permette di sapere in quale dei due casi ci troviamo.

Per capire meglio quanto appena detto, la Figura 1 mostra i grafici della funzione $f(x)$ definita sopra e della funzione $g(x)$ così definita:

$$g(x) = -\frac{x-6}{2x+2} + 1 = \frac{x+8}{2x+2}$$

Come si vede bene dalla figura, le due funzioni hanno restituito iperbole equilatere con stesso centro di simmetria identiche quanto a curvatura, ma i due casi sono distinti per la posizione dei relativi rami.

Per capire in quale dei due casi ci troviamo è sufficiente assegnare un valore qualsiasi ad x e determinare il corrispondente valore di y associato dalla funzione che stiamo considerando. Così, ad esempio, attribuendo a x valore 0 (e quindi di fatto determinando l'intercetta con l'asse delle ordinate),

si trova che:
$$f(0) = \frac{-6}{2} = -3$$
per cui sappiamo che il grafico della funzione f passa per il punto di coordinate (0,-3) e quindi i due rami di iperbole si trovano in alto a sinistra e in basso a destra rispetto al centro di simmetria.