Logica Booleana

Mirko Cesarini - Dario Pescini
nome.cognome@unimib.it

Università di Milano Bicocca

Logica booleana

- Aiuta a codificare i criteri di decisione
  - definita da George Boole, un matematico inglese
  - uso delle tecniche algebriche per elaborare delle espressioni (logiche)
- Perché questo argomento?
  - i criteri di scelta possono essere applicati dagli strumenti di elaborazione automatica delle informazioni
  - superare l'ambiguità del linguaggio naturale
- Dopo una breve introduzione, vedremo alcuni esempi

Logica booleana

- Espressione (booleana): una combinazione ben formata di
  - Operandi: (variabili e costanti)
    $V_1, V_2, \ldots V_n \in \{True, False\}$
  - Operatori:
    AND, OR, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, NOT
  - Parentesi,

    ...
- Le variabili possono assumere solo due valori
  - **True** (indicato anche come vero, oppure 1, ...)
  - **False** (indicato anche come falso, oppure 0, ...)
- Le tavole di verità consentono di comprendere il funzionamento degli operatori

Alcuni Operatori e le rispettive tavole di verità

A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	NOT A
0	1
1	0

- La tavola di verità dell'espressione A AND B, si usa in questo modo:
    - Nelle colonne blu, si cerca la riga che contiene i valori per i quali si vuole calcolare il risultato dell'espressione (es., A=0 e B=1)
    - Nella colonna rossa, si legge il corrispondente risultato (con A=0 e B=1, il risultato di A AND B è 0)

Espressioni booleane

- Consentono di codificare dei criteri di scelta
  - Valori in ingresso $\rightarrow$ $\boxed{\text{Espressione (da valutare)}}$ $\rightarrow$ Risultato
  - *Variabili*, *risultato* $\in \{True, False\}$
- Sarebbe più corretto parlare di funzione (un'espressione che associa agli elementi di un dominio i valori di un codominio)
- Es.: prendo_impermeabile = piove AND (NOT ho_ombrello)

Piove	Ho_ombrello	prendo_impermeabile
False	False	False
False	True	False
True	False	True
True	True	False

Operatori e tavole di verità (2. parte)

- Già visti

A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	NOT A
0	1
1	0

- Nuovi

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	A $\leftrightarrow$ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A $\rightarrow$ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Spy Story

- Immaginate di essere un agente segreto al quale è stata affidata un'importante missione
- ...obiettivo della missione: prendere contatti con l'agente segreto 00A, infiltrato nei servizi segreti di un paese nemico ...
- Purtroppo voi non conoscete personalmente 00A e non esistono sue fotografie. E' stato combinato un appuntamento nel quale voi incontrerete 00A e lo riconoscerete grazie ad un gesto particolare
- ...00A sarà la persona che al bar chiederà un **caffè con panna** o una **cioccolata con il latte** ...
- ...attenzione il bar è frequentato assiduamente da spie nemiche
- Al banco del bar si presentano tre persone:
  - Mr X chiede un caffè macchiato
  - Mr Y chiede una cioccolata con panna
  - Mr Z chiede un caffè con panna e una cioccolata con il latte
- Qual è l'agente segreto? ...(continua)

L'ambiguità del linguaggio naturale

- ...00A sarà la persona che al bar chiederà un **caffè con panna** o una **cioccolata con il latte** ...
- Aiutiamoci con la logica booleana. L'asserzione di partenza può essere riscritta per mezzo di operatori booleani:
(caffè AND panna) ??? (cioccolata AND latte)
- Possibile ambiguità: al posto dei ??? potrebbe essere impiegato
    - OR (detto anche "or inclusivo"); A OR B significa che l'espressione è vera se o A, o B, o entrambi sono veri.
    - XOR (detto anche "or esclusivo"); A XOR B significa che l'espressione è vera se 1 solo tra A e B è vero
- Il testo non ci aiuta a scegliere, è ambiguo
- Assumiamo come vera la prima interpretazione (ma è una scelta del tutto arbitraria)
- L'espressione può essere quindi riscritta in questo modo
(caffè AND panna) OR (cioccolata AND latte)

Ricapitoliamo

- Clienti
  - Mr X chiede un caffè macchiato
  - Mr Y chiede una cioccolata con panna
  - Mr Z chiede un caffè con panna e una cioccolata con il latte
- OOA = (caffè AND panna) OR (cioccolata AND latte)
  Le parentesi qua sopra non servirebbero, ma facilitano la lettura
  - Mr X: (True AND False) OR (False AND True)
    risultato: False
  - Mr Y: (False AND True) OR (True AND False)
    risultato: False
  - Mr Z: (True AND True) OR (True AND True)
    risultato: True

- Data l'espressione di partenza
  ..."00A sarà la persona che al bar chiederà un
  caffè con panna o una **cioccolata con il latte** ...attenzione
  il bar è frequentato assiduamente da spie nemiche"
- Vediamo ora la seconda interpretazione (XOR)
  (caffè AND panna) XOR (cioccolata AND latte)
  - La formula logica così ottenuta, descrive un'interpretazione della frase di partenza. Non è verificata né da Mr. X, né da Mr. Y, né da Mr. Z
  - Ma se per esempio Mr. W si presenta al bancone e ordina un caffè con panna
    (True AND True) XOR (False AND False) = True
- Questo è un esempio ...del fatto che occorre valutare attentamente tutte le "proposte" di soluzione.
- Suggerimento: solo facendo delle verifiche ci si rende conto se una proposta (di soluzione) è sbagliata o corretta

Precedenze tra operatori

- Data l'espressione A or B and C
  Cosa calcolo per primo
  A or B oppure B and C?
- L'operatore AND ha la precedenza sull'operatore OR
- AND può essere paragonato alla moltiplicazione, OR alla somma (. . . e NOT al segno meno) delle espressioni matematiche
  A or B and C è equivalente a A + B x C
- Se voglio modificare l'ordine . . . , devo usare le parentesi,
- Es: (A or B) and C

Alcune proprietà degli operatori booleani

Proprietà	AND	OR
Identità	A$\times$1=A	A+0=A
Elemento nullo	A$\times$0=0	A+1=1
Idempotenza	A$\times$A=A	A+A=A
Inverso	$A \times (-A) = 0$	A+(-A)=1
Commutativa	$A \times B = B \times A$	$A + B = B + A$

Proprietà di De Morgan

- Applicazione delle proprietà di Demorgan
  not (A and B) = (not A) or (not B)
  not (A or B) = (not A) and (not B)
- Errore che si commette spesso:
  not (A and B) = (not A) ~~and~~ or (not B)

Esistono diverse rappresentazioni (notazioni) degli operatori

Negazione	NOT	$\neg$ A	!A	-A
Congiunzione	AND	A $\wedge$ B	A & B	A $\times$ B
Disgiunzione	OR	A $\vee$ B	A $\mid$ B	A + B
Implicazione (se ... allora)	A $\rightarrow$ B	A $\supset$ B	A $\Rightarrow$ B	
Doppia implicazione (se e solo se)	A $\leftrightarrow$ B	A $\equiv$ B	A $\Leftrightarrow$ B	