Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano – Bicocca

Esercizi: funzioni in piú variabili e calcolo differenziale.

Versione del 6 ottobre 2022

Indice

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).
Gli esercizi con "*" sono piú difficili degli altri !

---

1 Domini e curve di livello di funzioni in piú variabili.

1. Delle funzioni di seguito indicate, si determini il dominio, lo si disegni e si traccino alcune curve di livello:

$$f_1(x,y) = \log(x-y) \qquad f_2(x,y) = e^{x^2+2y^2} - 1$$
$$f_3(x,y) = xy \qquad f_4(x,y) = \frac{x^2}{y}$$
$$f_5(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \qquad f_6(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$
$$f_7(x,y) = xe^{-y} \qquad f_8(x,y) = \sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$$
$$f_9(x,y) = \frac{y}{x}e^x \qquad f_{10}(x,y) = x\,(y - \log x)$$

2. Sia $f(x,y) = \log\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$. Si determini il dominio e le curve di livello di f.

3. Sia $f(x,y) = \sqrt[4]{9 - x^2 - y^2}$. Si determini il dominio di f e si disegni il grafico $z = f(x,y)$.

4. Sia $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$. Si determini le curve di livello di f.

5.* Sia $z = f(x,y)$ la funzione definita da $z \geq 0,\ x^2 + (y-z)^2 = 2z^2$. Si determinino le curve di livello della funzione f;

6. Delle funzioni di seguito indicate si descrivano le superfici di livello:

$$f_1(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2) \qquad f_2(x,y,z) = (x+2y+3z)^3$$
$$f_3(x,y,z) = 2^{x^2+y^2} \qquad f_4(x,y,z) = e^{|x|+|y|+|z|}$$

2 Limiti.

1. Determinare, nel caso in cui esistono, i seguenti limiti di funzione

$$a.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2y} \qquad b.\ \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$c.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+2y} \qquad d.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x^2+y^2}$$

$$e.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad f.\ \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sqrt[3]{1-xy}-1}{y}$$

$$g.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^4} \qquad h.^*\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3x+\sin(yx^2)}{x^2+y^4}$$

[a. 0. b. 0. c. $\nexists$. d. $\nexists$. e. $\nexists$. g. $\nexists$. h. 0.]

2. Sia $f:\mathbb{R}^2\setminus\{x=0\}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y)=ye^{\frac{y}{x}}$. Si calcoli

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

[$\nexists$.]

3. Determinare, se esistono, i seguenti limiti di funzione

$$a.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x}y\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^4}} \qquad b.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[5]{x}\,\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[30]{(x^2+|y|)^{23}}}$$

[a. 0. b.$\nexists$.]

3 Continuità e differenziabilità.

1. Si stabilisca se esiste qualche funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua tale che per $(x,y)\neq 0$ si abbia

$$f(x,y)=\frac{[(x-1)^2+y^2]\log[(x-1)^2+y^2]}{|x|+|y|}.$$

[No.]

2. Sia

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-y^2}{y^2+4x^2}\arctan\left(x\sqrt{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Si stabilisca

a. se la funzione f è continua nell'origine;

b. se la funzione f è differenziabile nell'origine.

[a. Si. b. Si.]

3. Sia

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y^2}\arctan\left(x^2+y^2\right), & \text{se } y\neq 0\\ 0, & \text{se } y=0\end{cases}$$

Si stabilisca

a. se la funzione f è continua nell'origine;

b. si calcolino le derivate parziali in $(0,0)$.

[a. No. b. $\nabla f(0,0)=(0,0)$.]

4. Sia

$$f(x,y)=\begin{cases}(y^3-27x^3)\log|y-3x|, & \text{se } y\neq 3x\\ 0, & \text{se } y=3x\end{cases}$$

Si stabilisca per quali punti della retta $y=3x$

a. la funzione f è continua;

b. f ammette derivate parziali;

c. f è differenziabile.

[a. Tutti. b. Solo $(0,0)$*. c. Solo* $(0,0)$*.]*

5. Sia
$$f(x,y) = \sqrt[7]{x^4 \sin^3(y)}$$

a. Per ogni versove $v = (\cos\beta,\ \sin\beta)$ si calcoli la derivata direzionale $D_v f(0,0)$;

b. si stabilisca, in base al risultato precedente, se esiste il piano tangente al grafico della funzione in $(0,0)$.

[a. $\sqrt[7]{\cos^4\beta \sin^3\beta}$*. b. No.]*

6.* Sia α reale e positivo e
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 + y^4}{(x^2+y^2)^\alpha + x^2y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Per quali α

a. f è continua nell'origine;

b. f ammette derivate parziali nell'origine;

c. f è differenziabile nell'origine.

[a. $\alpha < 2$*. b.* $\alpha < 3/2$*. c.* $\alpha < 3/2$*.]*

7. Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x^2,\ x \neq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a. Si stabilisca se la funzione f è continua e se è differenziabile nell'origine;

b. per ogni versove $v = (v_1, v_2)$ si calcoli la derivata direzionale $D_v f(0,0)$;

c. f è continua in $\{(x,y) :\ y \leq 0\}$?

8.* Sia
$$f(x,y) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-xyt^2}}{t}\, dt$$

Si provi che f è definita e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Si calcoli
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

[0.]

9.* Sia α reale fissato e
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2y^2\right)^\alpha}{x^2y + y^3}, & \text{se } y \neq 0 \\ x, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Si stabilisca per quali valori di α

a. la funzione f è continua nell'origine;

b. la funzione f è differenziabile nell'origine.

[a. $\alpha > 3/4$*. b. Nessuno.]*

10.* Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)e^{-\frac{y^2}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si stabilisca per quali y_0

a. la funzione f è continua in $(0, y_0)$;

b. la funzione f è differenziabile in $(0, y_0)$.

[a. $\forall y_0$. *b.* $\forall y_0 \neq 0$.*]*

11. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x^3 - x\sin^2 y)} - 1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si stabilisca se nell'origine

a. la funzione f è continua;

b. la funzione f ammette derivate direzionali $D_v f(0,0)$ e in caso affermativo le si calcoli;

c. la funzione f è differenziabile.

[a. Si. b. Si. c. No.]

12. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nulla sugli assi coordinati e definita da $f(x,y) = x^2 \log|xy|$ nel complementare degli assi è differenziabile in $(0,0)$? *[No.]*

13.* Sia α parametro reale e

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y}{|x| + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Dimostrare che f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$;

b. dimostrare che f è differenziabile $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 1$.

14. Sia $\alpha > 0$ e

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)^{\alpha/2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Al variare di α

a. si stabilisca se f è continua e differenziabile $(0,0)$;

b. si calcolino le derivate parziali in $(0,0)$.

[a. continua $\forall\alpha$, *differenziabile* $\forall\alpha > 1$. *b.* $\nabla f(0,0) = (0,0)$.*]*

15. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $n \geq 2$, definita da

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \left(1 - e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{|x_1|}}\right) & \text{se } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x_1 = 0 \end{cases}$$

ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ indica un vettore e $\|\mathbf{x}\|$ la sua norma euclidea.

a. Si stabilisca se f è continua nell'origine $\mathbf{0}$;

b. si calcolino $\nabla f(\mathbf{0})$ e $D_v f(\mathbf{0})$, dove v è una qualsiasi direzione;

c. si stabilisca se f è differenziabile in $\mathbf{0}$.

[a. Si. b. $D_v f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\forall v$. *c. No.]*

16. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a. Si stabilisca se f è continua nell'origine e ivi differenziabile;

b. si calcoli $\nabla f(0)$ e $D_v f(0)$, dove v è una qualsiasi direzione.

[a. No.]

17. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ -\sqrt{xy} & \text{se } x < 0,\ y < 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   a. Si stabilisca se f è differenziabile nell'origine;

   b. si calcoli, se esiste, la derivata direzionale nell'origine secondo la direzione del vettore $(1,1)$.

   [a. No.]

18. Si stabilisca se la funzione

$$f(x,y) = \log\left(\frac{1-|x-y|}{1-|x|}\right)$$

   è differenziabile nell'origine. *[a. No.]*

19. Si stabilisca in quali punti del suo dominio la funzione

$$f(x,y) = |y-1|\,(e^{xy}-3)$$

   è differenziabile.

20. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

   a. Si calcoli $D_v f(0)$, dove v è una qualsiasi direzione;

   b. si stabilisca se f è differenziabile nell'origine.

   [b. No.]

4 Ulteriori esercizi

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 e^{-\|\mathbf{x}\|}$$

   ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ indica un vettore e $\|\mathbf{x}\|$ la sua norma euclidea.

   a. Si disegni il profilo di f;

   b. si calcolino $\nabla f(\mathbf{x})$ e $D_v f(\mathbf{x})$, dove v è la direzione individuata dal vettore $(-1,1)$;

   c. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,2/e^2)$;

   d. si scriva la formula di Taylor di f centrata in $(1,0)$, arrestata al secondo ordine.

2. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $n \geq 2$, definita da

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \log \|\mathbf{x}\| & \text{se } \|\mathbf{x}\| \neq 0 \\ 0, & \text{se } \|\mathbf{x}\| = 0 \end{cases}$$

   ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ indica un vettore e $\|\mathbf{x}\|$ la sua norma euclidea.

   a. Si disegni il profilo di f;

   b. si calcolino $\nabla f(\mathbf{x})$ e $D_v f(\mathbf{x})$, dove v è la direzione individuata dal vettore $(1,1,\ldots,1)$;

   c. si disegnino le curve di livello per $n = 2$ e $n = 3$;

   d. si scriva la formula di Taylor di f centrata in $(2,0,\ldots,0)$, arrestata al secondo ordine. Nello stesso punto si scriva l'equazione del piano tangente.

3. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si calcolino le derivate $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. *[*$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0.$*]*

4. Delle funzioni di seguito indicate, si scrivano i polinomi di Mc Laurin arrestati al secondo ordine:

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y) = \log(3+x^2-y) & f_2(x,y) = e^{x^2+2y^2} - 1 \\ f_3(x,y) = xy + x^2 + y & f_4(x,y) = \dfrac{x^2}{y+1} \\ f_5(x,y) = \sin(xy) & f_6(x,y) = \sin(x)\cos(xy) \\ f_7(x,y,z) = xe^z - ye^x + z & f_8(x,y,z) = \cos(x^2+y^2+z^2) - \log(1-x^2-y^2) \end{array}$$

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 e^{-\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

a. Si calcolino $\nabla f(1,0,1)$ e $D_v f(1,0,0)$, dove v è la direzione individuata dal vettore $(1,1,1/2)$;

b. si scriva il l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(0,0,0,0)$.

6. Delle funzioni di seguito indicate, si scrivano i polinomi di Taylor arrestati al secondo ordine nel punto indicato:

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y) = \log(3+x^2-y) & (x_0,y_0) = (1,3) \\ f_2(x,y) = xy^2 + x^2 + \sqrt[3]{y} & (x_0,y_0) = (1,-1) \\ f_3(x,y,z) = xe^z - ye^x + z & (x_0,y_0,z_0) = (1,-1,1) \end{array}$$

7. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $n \geq 2$, definita da

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^2 e^{-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}} & \text{se } \|\mathbf{x}\| \neq 0 \\ 0, & \text{se } \|\mathbf{x}\| = 0 \end{cases}$$

ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ indica un vettore e $\|\mathbf{x}\|$ la sua norma euclidea.

a. Si disegni il profilo di f e, per $n = 2$, il grafico di f;

b. si calcolino $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ e $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)$, dove $\mathbf{v}$ è la direzione individuata dal vettore $\mathbf{v} = (1,1,\ldots,1)$ e $\mathbf{x}_0 = (0,0,0\ldots,0,1)$.

c. si scriva la formula di Taylor di f centrata in $\mathbf{x}_0$, arrestata al secondo ordine. Nello stesso punto si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f.

8. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $n \geq 2$, definita da

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \left(1 - e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{|x_1|}}\right) & \text{se } x_1 \neq 0 \\ 0, & \text{se } x_1 = 0 \end{cases}$$

ove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ indica un vettore e $\|\mathbf{x}\|$ la sua norma euclidea.

a. Si studi la continuaitá di f nell'origine;

b. si calcolino $\nabla f(\mathbf{0})$ e $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$, per ogni $\mathbf{v}$;

c. si studi la differenziabilitá di f nell'origine.

4.1 Funzioni convesse

1. Delle funzioni di seguito indicate, si determinino i valori del parametro α per cui f é convessa o concava nel suo dominio:

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - \alpha\log(x^2y^2) \qquad f_2(x,y) = e^{\alpha x^2+2y^2} - 1$$
$$f_3(x,y) = \alpha xy - x^2 + y \qquad f_4(x,y) = x^4 - \alpha y^2$$
$$f_5(x,y,z) = (x-2)^2 + (z+2)^2 + (y+\alpha)^4 \qquad f_6(x,y) = \alpha\|(x,y)\|_1$$
$$f_7(x,y,z) = -x^2 - 4xy + \alpha^2z^2 + \alpha x + 2\alpha xz - z^2$$

2.* Sia $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ una norma. Si pongano condizioni su tale norma affiché la funzione $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, definita da $f(\mathbf{x}) = e^{\|\mathbf{x}\|}$, sia una funzione convessa.

3.* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = -2x^{10} - x^2e^{-y^2} - y^8 + 1$; si derminino tutti i valori della costante α per cui si ha

$$f(x,y) - f(0,1) - \alpha y + \alpha \le 0, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

[$\alpha = -8$.]

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{x^2+y^4} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$. E' convessa ?

4.2 Matrice Jacobiana

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x,y) = \left(\displaystyle\int_0^{x+y^4} e^t\,\mathrm{d}t, xy, 2xy^3\right)$. Si calcoli la sua matrice jacobiana.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^4e^{x^2+y}$. Si calcoli la matrice jacobiana di $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

3. Si stabilisca se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = ((x+y^2)e^{-y^2-x}, (x^2+y)e^{-y^2-x})$$

è invertibile in un intorno di $(1/2, -1/2)$.

4. Si verifichi che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = \left(\int_{x^2}^{y^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t,\ \int_x^y e^{t^4}\,\mathrm{d}t\right)$$

é localmente invertibile in $(1,0)$. Si calcoli la matrice Jacobiana di f^{-1} in $\left(-\int_0^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t,\ -\int_0^1 e^{t^4}\,\mathrm{d}t\right)$.

5. Si stabilisca in quali punti del tipo $(x_0, y_0, 0)$ la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x,y,t) = (x^2y^2, x^2 + tx^2, x^2 + yt)$$

é localmente invertibile. Sia inoltre $\mathbf{z}_0 = f(1,2,0)$; si calcoli la matrice Jacobiana di f^{-1} in $\mathbf{z}_0$.