Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano – Bicocca

**Esercizi: Successioni e serie di funzioni.**

Versione del 4 dicembre 2022

---

# Indice



Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).
Gli esercizi con "*" sono piú difficili degli altri !
Gli esercizi indicati con "$^S$" sono svolti in "*Esercizi svolti sulla convergenza puntule e uniforme*" disponibile sulla pagina del corso.

---

# 1 Successioni di funzioni

1.$^S$ Data una successione $\{a_n\}_{n>0}$ di numeri reali, si consideri la funzione $f_n$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} na_nx & \text{se } 0 < x \le 1/n \\ a_n(2-nx) & \text{se } 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$.

2.$^S$ Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali non negativi, si consideri la successione $\{f_n\}$ definita da $f_n(x) = x^n e^{-a_n x}$. Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$ in $[0,\infty)$ nei seguenti casi:

*a.* $a_n = n$,

*b.* $a_n = \sqrt{n}$,

*c.* $a_n = n^2$,

*d.* $a_n = 1/n$.

3.$^S$ Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, si consideri la funzione $f_n$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n(1-nx) & \text{se } 0 \le x < 1/n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$ e si stabilisca se la convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$ in ciascuno dei seguenti casi:

*a.* $a_n = 1/n$;

*b.* $\{a_n\}$ successione qualsiasi.

4.$^S$ Si studino le convergenze puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione $\{f_n\}$, definita da

$$f_n(x) = \arctan(nx) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.$^S$ Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali positivi, si consideri la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = a_n x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$ in ciascuno dei seguenti casi:

*a.* $a_n = n^\alpha$, con $\alpha$ reale positivo;

*b.* $a_n = 1/\sqrt{n}$.

6.$^S$ Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, si consideri la funzione $f_n$ definita da

$$f_n(x) = a_n \mathbf{1}_{[n,n+1)}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^+$.

7.$^S$ Data la successione $\{f_n\}$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n(x+1)}{n+1} & \text{se } -1 < x < 1/n \\ \dfrac{n-nx+2}{n+1} & \text{se } 1/n \le x < 1+2/n \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

se ne studino le convergenze puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$.

8.$^S$ Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, si consideri la funzione $f_n$ definita da

$$f_n(x) = e^{-(x-a_n)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si studino le convergenze puntuale e uniforme di $\{f_n\}$ nei seguenti casi:

*a.* $a_n = (-1)^{n^2}$,

*b.* $a_n = n$,

*c.* $a_n = 1/n$.

9.$^S$ Si consideri la funzione $f_n$ definita da

$$f_n(x) = e^{-(x-1/n)^2} \cos\left(e^{(x-1/n)^2}\right).$$

*a.* Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$. Si verifichi che $\{f_n\}$ converge uniformemente in ogni compatto $K$.

*b.* Si studi la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$.

10. Sia

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si dimostri che $\{f_n\}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ a una funzione $f$ e che l'equazione

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

vale se $x \neq 0$, ma non se $x = 0$.

11. Si consideri

$$f_n(x) = x^{n-x/n} \qquad \forall x \in (0,1).$$

È vera la relazione

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x\ ?$$

*[Si.]*

12. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^e (\log x)^n \ \mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_1^3 (\log x)^n \ \mathrm{d}x.$$

*[0, $\infty$.]*

13. Data la funzione

$$f_n(x) = e^{nx}\ |x|^{1/n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

*a.* si determini l'insieme $E$ di convergenza semplice della successione $\{f_n\}$ e si calcoli la funzione limite;

*b.* si determinino i sottoinsiemi di $E$ in cui la convergenza di $\{f_n\}$ è uniforme.

*[a. $E = (-\infty, 0]$, $f(x) = 0$. b. $(-\infty, a]$ con $a < 0$ fissato.]*

14. Si consideri

$$f_n(x) = \int_n^{nx} t^{1/3}\, e^{-t}\, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*a.* Si determini l'insieme $E$ di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e la funzione limite $f$.

*b.* Si stabilisca se la convergenza è uniforme in $E$.

*[a. $E = [0, \infty)$, $f(x) = c\mathbf{1}_{\{0\}}(x)$ con $c$ costante negativa. b. No.]*

15. Data la funzione

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}\, x^{n-1}}{1 + x^n} \qquad \forall x \in [0, 1] \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

*a.* si calcoli il $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ e si stabilisca in quali intervalli del tipo $[0, a]$ la convergenza di $\{f_n\}$ è uniforme;

*b.* si stabilisca se $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$.

*[a. $f(x) = \infty\mathbf{1}_{\{1\}}(x)$; $0 < a < 1$ fissato. b. Si.]*

16. Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f_{n,a}$ la funzione definita da

$$f_{n,a}(x) = n^a\, x\, (1 - x^2)^n.$$

*a.* Si determini l'insieme $E_a$ di convergenza semplice di $\{f_{n,a}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e si calcoli la funzione limite;

*b.* si stabilisca se la convergenza è uniforme in $E_a$.

*[a. $E_a = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ se $a < 0$; $E_a = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se $a \geq 0$; $f(x) = 0$. b. Si per $a < 0$.]*

17. Data la funzione

$$f_n(x) = \frac{(x-1)^n}{1 + x^n}\ \arctan(n^{x-1})$$

*a.* determinare l'insieme $E$ di convergenza semplice della succesione $\{f_n\}$ e si calcoli la funzione limite;

*b.* determinare i sottoinsiemi di $E$ in cui la convergenza di $\{f_n\}$ è uniforme.

18. Per ogni $a$ in $\mathbb{R}^+$ ed $n$ in $\mathbb{N}$, si consideri la funzione

$$f_{n,a}(x) = \frac{n^a\, x^{n-3/2}}{1 + x^n} \qquad \forall x \in (0, 1).$$

*a.* si determini l'insieme $E$ in cui $\{f_{n,a}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge semplicemente e si calcoli la funzione limite;

*b.* si determinino i sottoinsiemi di $E$ in cui la convergenza di $\{f_{n,a}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è uniforme;

*c.* si stabilisca per quali valori di $a$ vale la relazione

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_{n,a}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_{n,a}(x)\,\mathrm{d}x$$

.

19. Per ogni intero positivo $n$ si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita da

$$f_n(x) = n\,x\,e^{-\sqrt{n}\,x}.$$

*a.* Si disegnino i grafici delle funzioni $f_n$ e si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}$ in $[0,\infty)$;

*b.* in quali sottoinsiemi di $[0,\infty)$ la convergenza di $\{f_n\}$ è uniforme?

*c.* Si calcolino i limiti seguenti:

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\pi f_n(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

20. Per ogni intero positivo $n$ si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, definita da

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^n}{1+(x-1)^n}.$$

*a.* Si determini l'insieme di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$.

*b.* Si studi la convergenza uniforme di $\{f_n\}$.

21. Per ogni intero positivo $n$ si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{n+|x|}\,\log(n+|x|).$$

*a.* Si determini l'insieme di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$.

*b.* Si studi la convergenza uniforme di $\{f_n\}$.

22. Sia $f_n : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^n}{(x-1)^n+(x+1)^n}.$$

*a.* Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

*b.* Si studi la convergenza uniforme di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

23. Sia $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Dopo aver verificato che le $f_n$ sono continue, si determinino gli insieme di convergenza puntuale e di convergenza uniforme di $\{f_n\}$.

*[Convergenza uniforme in $[0,\infty)$.]*

24. Sia $f_n : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{(n^2x-nx^2)^2+1}.$$

*a.* Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e si determini la funzione limite $f$.

*b.* Si determinino gli insiemie in cui la convergenza di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è uniforme.

*[b. su $(-\infty,a]\cup[b,c]$, per ogni $a<0<b<c$.]*

25. Sia $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_n(x) = \int_x^{nx} \frac{1}{1+y^6}\,\mathrm{d}y.$$

Si determinino gli insieme di convergenza puntuale e di convergenza uniforme di $\{f_n\}$.

*[Convergenza uniforme in $(-\infty,a]\cup[b,\infty)$ per ogni $a<0<b$.]*

## 2 Serie di funzioni

1.$^S$ Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ come nell'Esercizio 1.1.1. Si studino le convergenze puntuale e uniforme della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nei seguenti casi:

*a.* $a_n = 1/n^2$;

*b.* $a_n = 1/n$;

*c.* $a_n = (-1)^n/n$.

2.$^S$ Sia $f_n$ la funzione definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{se } \frac{1}{n+1} \le x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \le x. \end{cases}$$

*a.* Si determini l'insieme $E$ di convergenza puntuale della serie $\sum_n f_n$ e si mostri che la sua somma è continua in $E$;

*b.* si mostri che $\sum f_n$ non converge uniformemente in $E$.

3.$^S$ Si studino le convergenze puntuale, assoluta e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}.$$

4.$^S$ Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n,$$

*a.* si determini l'insieme dei punti dove converge;

*b.* si stabilisca se la convergenza è uniforme in $[0, \pi/4]$;

*c.* si calcoli $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n\right) \mathrm{d}x$.

5. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin x + n}{n^2}.$$

Si determinino gli insiemi in cui la serie converge uniformemente.

*[$\mathbb{R}$.]*

6.$^S$ Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{x^{2n}+n^a} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

si stabilisca per quali valori di $a$ essa

*a.* converge puntualmente in $|x| < 1$;

*b.* converge puntualmente in $|x| > 1$;

*c.* converge puntualmente in $\mathbb{R}$;

*d.* converge uniformemente in $[-1, 1]$, dopo aver dimostrato che converge uniformemente in $\mathbb{R}$ se $a > 2$.

7.$^S$ Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{\alpha} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si determinino, in dipendenza del parametro reale $\alpha$,

*a.* l'insieme di convergenza puntuale;

*b.*$^*$ l'insieme di convergenza uniforme.

*c.* Indicata con $f(x)$ la somma della serie nell'insieme di convergenza puntuale, si calcoli, quando esiste, il valore del $\lim_{x\to 0} f(x)$.

8.$^S$ Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{(2+\sin x)^{n^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*a.* Si dimostri che essa converge semplicemente in $\mathbb{R}$;

*b.* si stabilisca se la convergenza è uniforme nell'intervallo $[0, \pi]$;

*c.*$*$ si stabilisca se la convergenza è uniforme nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

9. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n)\, x^n,$$

si determini l'insieme $E$ sui cui si ha convergenza semplice. In quali sottoinsiemi di $E$ la convergenza è uniforme?

10. Si determini l'insieme di convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+n}{n^2x^4+n^4+1},$$

e si stabilisca se la convergenza è ivi uniforme.

*[$\mathbb{R}$; si.]*

11. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n+n^x},$$

con $x$ opportunamente scelto.

*a.* Si determino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme per $x \geq 0$;

*b.*$^*$ si determino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme nel dominio della serie di funzioni.

*[a. $[0,1) \cup (1,\infty)$; $[0,a] \cup [b,\infty)$ con $0 < a < 1 < b$ fissati.]*

12. Si studino le convergenze puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/n} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n.$$

*[Converge uniformemente in $[a,b]$ con $a < b < 0$ fissati.]*

13. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)^n} \qquad \forall x \in [0,\infty) \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

*a.* se ne determinino l'insieme $E_a$ di convergenza semplice e la funzione somma;

*b.* si descrivano i sottoinsiemi di $E_a$ in cui la convergenza è uniforme.

*[a. $E_a = [0,\infty)$ $\forall a > 0$. b. Per $a \in (0,2]$ conv.unif. in $[b,\infty)$ con $0 < b$ fissato; per $a > 2$ conv.unif. in $E_a$.]*

14. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali distinti, con $-\infty < a \le x_n \le b < \infty$. Supponiamo che $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di numeri reali tali che $\sum |c_n| < \infty$. Si dimostri che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x - x_n) \qquad \forall x \in [a,b]$$

converge uniformemente in $[a,b]$ e che la sua somma è continua in ogni punto di $[a,b] \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}$.

15. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$$

nel suo insieme di definizione.

*a.* Si studi la convergenza puntuale;

*b.* su quali intervalli di $\mathbb{R}^+$ la serie converge uniformemente?

*c.** Su quali intervalli di $\mathbb{R}$ la serie converge uniformemente?

*[a. $\mathbb{R} \setminus \left(\cup_{n=1}^{\infty}\{-1/n^2\}\right)$. b. $[a,\infty)$ con $0 < a$ fissato.]*

16. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{x+e^{-nx}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

*a.* se ne determini l'insieme $E$ di convergenza semplice;

*b.* si descrivano i sottoinsiemi di $E$ in cui la convergenza è uniforme.

*[a. $E = (-\infty, 0]$. b. $(-\infty, 0]$.]*

17. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^a + n^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

*a.* se ne determini l'insieme $E_a$ di convergenza semplice;

*b.* per $a \in [0,2] \cup (4,\infty)$ si descrivano i sottoinsiemi di $E_a$ in cui la convergenza è uniforme;

*c.** per $a \in (2,4]$ si descrivano i sottoinsiemi di $E_a$ in cui la convergenza è uniforme.

*[c. $[0,b]$ con $b > 0$.]*

18. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

Si calcoli la somma della serie.

*[Conv.punt. in $E = (-\infty,-2) \cup [0,\infty)$; conv.unif. in $(-\infty,a] \cup [b,\infty)$ con $a < -2$ e $0 < b$ fissati.]*

19. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$$

*a.* se ne determini l'insieme di convergenza puntuale;

*b.* si verifichi che si ha convergenza uniforme su ogni compatto.

*[a. $\mathbb{R}$. b. Sui compatti di $\mathbb{R}$.]*

20. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{nx^3}$$

*a.* se ne determini l'insieme di convergenza puntuale e si calcoli la somma;

*b.* si stabilisca se su tale insieme la convergenza sia uniforme.

*[a. $(-\infty, 0]$. b. No.]*

21. Si studi la convergenza uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \log\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right).$$

*[ $[-a, a]$ con $0 < a < 1$ fissato.]*

22. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}$$

in $\mathbb{R}^+$.

*[Convergenza uniforme in $\{0\} \cup [a, \infty)$ con $a > 1$ fissato.]*

23. Si consideri

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n \arctan x^{n^3}.$$

Si determini l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme della serie di funzioni.

24. Si determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme delle serie seguenti:

*a.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$ *b.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^{n+1}}{e^{nx^2}}$

*c.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$ *d.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^n}{(n-1)!}$

*e.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^x\, x^n$ *f.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx^2}}$

*g.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2}$ *h.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n \log\left(\frac{x^n}{n(n-1)^2}\right)$

*i.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)\right)^n$ *l.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(nx) - \arctan((n-1)x))$

*m.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^x-2)^n}{n+n^x}$ *n.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n \log(1+n^x)$

*o.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n+n}{1+n^2}$ *p.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 e^n + e^{-nx}}$

*q.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (e^{x/n} - 1) \sin(x/n)$

25. Si studino, al variare del parametro reale positivo $a$, le convergenze semplice e uniforme delle serie seguenti in $\mathbb{R}^+$:

$$a.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x^a+n)^a} \qquad\qquad b.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^a}{x+n^2}$$
$$c.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^a+n} \qquad\qquad d.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x+n}\right)^a$$

26. Sia, per $x \in \mathbb{R}^+$ e $a$ positivo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^a+n^2}.$$

*a.* se ne determini l'insieme $E_a$ di convergenza semplice;

*b.** si descrivano i sottoinsiemi di $E_a$ in cui la convergenza è uniforme.

*[b. per $a \in (0,2]$ sui compatti di $\mathbb{R}^+$, per gli altri $a$ su $\mathbb{R}^+$.]*

# 3 Serie di potenze

1. Si mostri che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ ma non è sviluppabile in serie di McLaurin.

2. Si determinino il raggio di convergenza, l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme delle seguenti serie:

$$a.^S \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n}-1)^{-n}\, x^n \qquad\qquad b.^S \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\log(1+n))^{-1}\, x^n$$
$$c.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\,(x+1)^n \qquad\qquad d.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, x^n$$
$$e.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{n}\, x^n \qquad\qquad f.\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n\,\log n}\,(1-x)^n$$
$$g.\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n\, x^{n!} \qquad\qquad h.\quad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{2+n}}{n}\, x^{2n}.$$

*[c. compatti in $(-5,3)$; d. compatti in $(-e,e)$; e. compatti in $(-1,1)$;*
*[f. compatti in $(1/2,3/2]$; g. compatti in $(-1,1)$; h. compatti in $(-1,1)$.]*

3.* Si determini, in dipendenza dal parametro intero positivo $k$, il raggio di convergenza delle seguenti serie:

$$a.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3} x^{n^k} \qquad\qquad b.\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n\, x^{n^k}.$$

4. Si calcolino, con un errore inferiore a $10^{-2}$, i seguenti integrali:

$$a.^S \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad b.\quad \int_0^{1/2} \frac{\arctan x - \sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$c.^S \quad \int_0^{1} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad d.\quad \int_0^{1/4} \frac{\log(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$e.\quad \int_0^{1} \frac{e^{-x^2}-1+x^2}{x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad f.\quad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

5. Si determinino l'insieme di convergenza semplice, gli insiemi di convergenza uniforme e la somma $f(x)$ delle seguenti serie:

| | |
|---|---|
| *a.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n$ | *b.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ |
| *c.*$^S$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ | *d.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^n}{(n-1)!}$ |
| *e.*$^S$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\,x^n}{(n-1)!}$ | *f.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\,n!}$ |
| *g.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$ | *h.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,(x-e)^n$ |
| *i.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x^2-3}{x^4-3x^2+1}\right)^n$ | *l.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,e^{(x^2-3x+1)n}$ |
| *m.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n-1)!(n+3)}$ | *n.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-2^n}{n!}x^n.$ |

*[a. $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$ nei compatti di $(-1,1)$; f. $f(x)=\int_0^{x-2}\frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$;*
*[m. $f(x)=xD\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x e^t t^3\,\mathrm{d}t\right)$; n. $f(x)=2e^x-e^{2x}-1$.]*

6. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1+(-1)^n}{(n+1)!}\,x^n.$$

*a.* Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;

*b.* si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$;

*c.* si calcoli, con un errore inferiore a $10^{-3}$, l'integrale

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*[b. $f(x)=e^x+\frac{1-e^x}{x}$.]*

7. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,x^n.$$

*a.* Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;

*b.* se ne calcoli la somma;

*c.* si calcoli, con un errore inferiore a $10^{-3}$, l'integrale

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*[b. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$.]*

8. Si calcoli, con un errore inferiore a $10^{-2}$, l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x - x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

9. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(n+1)}{n^2}\,x^n.$$

*a.* Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;

*b.* se ne calcoli la somma e la si indichi con $f(x)$;

*c.* si calcoli, con un errore inferiore a $10^{-3}$, l'integrale

$$\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[b. $f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\int_0^x \frac{\log(1+t)-t}{t}\,\mathrm{d}t\right)$.]

10. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+1)}{(2n)!\,2n}\,x^{2n}.$$

*a.* Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;

*b.* si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$;

*c.* si calcoli, con un errore inferiore a $10^{-3}$, l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

11. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}\,x^n.$$

a. Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;

b. se ne calcoli la somma e la si indichi con $f(x)$;

c. si calcoli, con un errore inferiore a $10^{-3}$, l'integrale

$$\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*[b. $f(x) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\log(1+t)-t}{t}\,\mathrm{d}t\right)$.]*

12. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,(x-1)^n\,\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

*a.* Si determini l'insieme $E \subset \mathbb{R}$ in cui essa converge puntualmente, e si indichi con $f(x)$ la sua somma.

*b.* Si verifichi che la serie converge uniformemente in $[a, 2]$, per ogni $a \in (0, 1)$.

*c.* Si calcoli $f(3/2)$ con un errore inferiore a $10^{-2}$.

13. Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ pari} \\ \dfrac{1}{3^n} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Si determini l'insieme in cui converge uniformemente e, ove possibile, si calcoli la somma $f$.

*[Nei compatti di $(-1/2, 1/2)$, $f(x) = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{3x}{9-x^2}$.]*