Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano – Bicocca

Esercizi: equazioni differenziali e sistemi di equazioni differenziali.

Versione del 23 gennaio 2023

Indice

Solo alcuni degli esercizi hanno la risposta (scritta in piccolo in parentesi quadre).
Gli esercizi con "*" sono piú difficili degli altri !

---

1 Equazioni differenziali del primo ordine

1.1 Equazioni a variabili separabili

1. Si integrino le seguenti equazioni

   a. $ye^{2x} - (1+e^{2x})y' = 0$ *[$y(x) = c\sqrt{1+e^{2x}},\ c \in \mathbb{R}$.]*

   b. $\tan x \sin^2 y + y' \cos^2 x \cot y = 0$ *[$\cot^2 y(x) = c + \tan^2 x,\ c \in \mathbb{R}$.]*

   c. $xy' - y = y^3$ *[$y = 0,\ x(y) = \frac{cy}{\sqrt{1+y^2}},\ c \in \mathbb{R}$.]*

   d. $y - xy' = a(1 + x^2 y'),\ a \in \mathbb{R}$ *[$y(x) = \frac{a+cx}{1+ax},\ c \in \mathbb{R}$.]*

   e. $3e^x \tan y + (1-e^x)y' \sec^2 y = 0$ *[$y(x) = \arctan\left(c(1-e^x)^3\right),\ c \in \mathbb{R}$.]*

   f. $y' \tan x = y$ *[$y(x) = c \sin x,\ c \in \mathbb{R}$.]*

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

   a. $\begin{cases} (1+e^x)yy' = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *[$y(x) = \sqrt{1 + \log\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}$.]*

b. $\begin{cases} (xy^2+x)+(x^2y-y)y'=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ *[*$y(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$*.]*

c. $\begin{cases} y'\sin x = y\log y \\ y(\pi/2)=1 \end{cases}$ *[*$y(x)=1$*.]*

d. $\begin{cases} y'+2xy=0 \\ y(0)=-1 \end{cases}$ *[*$y(x)=-e^{-x^2}$*.]*

e. $\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{y-1} \\ y(0)=e \end{cases}$ *[*$y(x)-\log y(x) = 1/2x^2+e-1$*.]*

f. $\begin{cases} y'=(y^2-y)\log(2+x) \\ y(-1)=1/2 \end{cases}$ *[*$y(x)=\frac{e^{x+1}}{(x+2)^{x+2}+e^{x+1}}$*.]*

3. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'=y^{2/3} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Si provi che ammette infinite soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

4. Si determini $y_0 \in \mathbb{R}$ tale che il problema

$$\begin{cases} y'=\frac{5}{2}ty^{1/5} \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

abbia soluzione locale, ma non unica: si scrivano almeno 3 soluzioni.

5. Si determinino tutte le soluzioni locali dei seguenti problemi di Cauchy

a. $\begin{cases} y'(x^2-1)=2xy \\ y(1)=1 \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} y'(x^2-1)=2xy \\ y(0)=1 \end{cases}$ *c.* $\begin{cases} y'(x^2-1)=2xy \\ y(1)=0 \end{cases}$

1.2 Equazioni lineari

1. Si integrino le seguenti equazioni

a. $xy'-y-x^3=0$ *[*$y(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+c\right)x,\ c\in\mathbb{R}$*.]*

b. $y'=\dfrac{y}{x+1}+e^x(x+1)$ *[*$y(x)=(e^x+c)(x+1),\ c\in\mathbb{R}$*.]*

c. $y'=-y\cot x+2\cos x$

d. $y'=y\tan x+\sin x$

e. $y'=\dfrac{2y}{x}+\dfrac{x+1}{x}$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

a. $\begin{cases} y'-\dfrac{y}{1-x^2}-1-x=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$ *[*$y(x)=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$*.]*

b. $\begin{cases} xy'+y-e^x=0 \\ y(a)=b \qquad \text{con } a\neq 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y'=-\dfrac{2x}{1+x^2}y+\dfrac{1}{x(1+x^2)} \\ y(-1)=0 \end{cases}$ *[*$y(x)=\frac{\log(-x)}{1+x^2}$*.]*

d. $\begin{cases} y'+3x^2y=x^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ *[*$y(x)=(1+2e^{-x^3})/3$*.]*

3. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' + 2\alpha \frac{y}{x} = x^\alpha \log x$$

verificano la relazione

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = 0.$$

[$-1/2 < \alpha < 0$.]

1.3 Equazioni di Bernoulli

1. Si integrino le seguenti equazioni

   a. $y' + 2y\sin x = \dfrac{\sin x}{y^2}$ *[$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + ce^{6\cos x}}$, $c \in \mathbb{R}$.]*

   b. $y' = -\dfrac{y}{6x} + \dfrac{x}{2y^5}$

   c. $y' = \dfrac{4y}{x} + x\sqrt{y}$ *[$y(x) = 0$ e $y(x) = x^4\left(\frac{1}{2}\log|x| + c\right)^2$ $c \in \mathbb{R}$.]*

   d. $y' - y + y^2(t^2 + t + 1) = 0$

   e. $y' - 2y = 2(e^t + t)\sqrt{y}$ *[$y(x) = 0$ e $y(x) = (ce^t + te^t - t - 1)^2$ $c \in \mathbb{R}$.]*

   f. $yy' - y^2 = 3t$

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

   a. $\begin{cases} (x^2 + x)y' + 3(2x + 1)y = 3x\sqrt{x + 1}\,y^{2/3} \\ y(2/3) = 0 \end{cases}$ *[$y(x) = \left(\frac{2(1+x)^{3/2}}{5x} - \frac{2(1+x)^{1/2}}{3x}\right)^3$.]*

   b. $\begin{cases} (e^t + t^2)y' + (2e^t + 1)y = \sqrt[3]{t + 1}\,y^4 \\ y(-3) = 0 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} y' - \dfrac{y}{t} - y^3\sin t = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$ *[$y(t) = \left(2\cos t - 4\frac{\sin t}{t} - 4\frac{\cos t}{t^2} + \frac{3\pi^2 - 4}{t^2}\right)^{-1/2}$.]*

   d. $\begin{cases} y' = 4y + 2e^t\sqrt{y} \\ y(0) = 4 \end{cases}$ *[$y(t) = \left(3e^{2t} - e^t\right)^2$.]*

1.4 Equazioni di Riccati

1. Si integrino le seguenti equazioni

   a. $y' = y^2 - ty + 1$ (si noti che esiste un polinomio del primo ordine che é soluzione)

   b. $(1 + x^2)y' - (1 + 2x)y + y^2 = 1 - x$

   [a. $y(t) = t + \frac{e^{t^2/2}}{c - \int_0^t e^{s^2/2}\,ds}$ con $c \in \mathbb{R}$ e $y(t) = t$; b. $y(x) = x + \frac{1}{1 + ce^{-\arctan x}}$ con $c \in \mathbb{R}$ e $y(x) = x$.]

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

   a. $\begin{cases} x' = (t - 1)x^2 + (1 - 2t)x + t \\ x(0) = 2 \end{cases}$ *[$x(t) = \frac{e^t + t + 1}{e^t + t}$.]*

   b. $\begin{cases} y' + 2e^t y - y^2 = e^{2t} + e^t \\ y(0) = 2 \end{cases}$ (e^t é una soluzione dell'equazione differenziale) *[$y(t) = e^t + \frac{1}{1 - t}$.]*

1.5 Equazioni omogenee

1. Si integrino le seguenti equazioni

   a. $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$ *[$y(x) = -x \log\log \frac{c}{x},\ c \in \mathbb{R}$.]*

   b. $y' = -\dfrac{x+y}{x}$ *[$y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2},\ c \in \mathbb{R}$.]*

   c. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$ *[$y(x) = \frac{c}{2}x^2 - \frac{1}{2c},\ c \in \mathbb{R}$.]*

2. Dopo aver discusso l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy, si determini la soluzione locale:

   a. $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -2xyy' \\ y(2) = 1 \end{cases}$ *[$y(x) = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$.]*

   b. $\begin{cases} y' = \dfrac{t}{y} + \dfrac{2y}{t} \\ y(1) = -2 \end{cases}$ *[$y(t) = -t\sqrt{5t^2-1}$.]*

   c. $\begin{cases} y' = \dfrac{t^2+ty+y^2}{t^2} \\ y(1) = -1 \end{cases}$ *[$y(t) = t\tan(\log t - \pi/4)$.]*

1.6 Esercizi vari

1. Si integrino le seguenti equazioni

   a. $x' = -1 - 2x + x^2$

   b. $x(1+y^2)y' = 3$

   [a. $x(t) = 1 - \sqrt{2}\tanh(c + \sqrt{2}t)$.]

2. Si discuta l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale del seguente problema di Cauchy e la si determini:
$$\begin{cases} (y' - 5y)(1 + e^{-5x})^2 = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

3. Si consideri il problema
$$\begin{cases} (x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
Si tracci un grafico qualitativo locale della soluzione e si scriva il polinomio di Taylor $P_2(x)$ del secondo ordine centrato in 1.
[$P_2(x) = 2 + 8(x-1) - 6(x-1)^2$.]

4. Si risolva
$$\begin{cases} 2xy^2 - y + xy' = 0 \\ y(2) = 2/5 \end{cases}$$
[$y(x) = \frac{x}{x^2+1}$.]

5. Sia $a > 0$. Si consideri
$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{-y}}{x(x-1)} \\ y(2) = \log a \end{cases}$$
Determinare la soluzione e il piú ampio intervallo di definizione della soluzione.
[$y(x) = \log\left(a + \log\frac{2(x-1)}{x}\right)$.]

6. Si determini la soluzione massimale del problema
$$\begin{cases} y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$
[$y(x) = -x\log\left(1 - \log\frac{x}{2}\right),\ x \in (0, 2e)$.]

7. Si consideri
$$\begin{cases} y' - 8x^5 y + 4x^3 y^2 = 2x(1-2x^6) \\ y(0) = a \end{cases}$$

   a. si verifichi che l'equazione differenziale ha una soluzione tra i polinomi del secondo ordine;

   b. si determini la soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$ e il relativo intervallo massimo di definizione.

8. Si determini, per ogni $a \in \mathbb{R}$, la soluzione locale del problema
$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 + 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$
   Si determini a tale che la soluzione possa essere definita su tutto $\mathbb{R}$.

   [$a = 0,\ y(x) = x$.]

9. Si consideri
$$(1+x^2)y' + 6xy - 3y^{2/3}(1+x^2)\log(3+x^2) = 0.$$

   a. Si determini l'integrale generale;

   b. si provi che per ogni $y_0 \neq 0$ e per ogni x_0 esiste unica la soluzione locale del problema di Cauchy
$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 6xy - 3y^{2/3}(1+x^2)\log(3+x^2) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   c.* si provi che per $y_0 = 0$ e per ogni x_0 esisteno piú soluzioni locali del precente problema di Cauchy. Si usi questo risultato per provare che ogni (x_0, y_0) il problema di Cauchy ha infinite soluzioni.

   [a. $y(x) = 0$ e $y(x) = \left(\frac{3x(3+x^2)\log(3+x^2) - 2x^3 + c}{9(x^2+1)}\right)^3$.]

10. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} x^2 y' + y^2 - 1 = 0 \\ y(2) = k \end{cases}$$

   a. si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale;

   b. si determini $k \in \mathbb{R}$ tale che la corrispondente soluzione del problema di Cauchy sia definita su tutto $(0, \infty)$.

   [b. $-\frac{e+1}{e-1} \leq k \leq 1$.]

11. Si discuta l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale del seguente problema di Cauchy e lo si risolva:
$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{(x+1)^2} = x^2 y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
   Si stabilisca se la soluzione é definita su tutto $\mathbb{R}$.

   [$y(x) = e^{\frac{1}{x+1}} \left(e - \int_0^x s^2 e^{\frac{1}{s+1}}\, \mathrm{d}s\right)^{-1}$, no.]

12. Si verifichi che il problema di Cauchy
$$\begin{cases} xy'' + 2y' = e^{x^2} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \dfrac{e-1}{2} \end{cases}$$
   ha una sola soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

   [$y(x) = \int_1^x \frac{e^{s^2} - 1}{2s^2}\, \mathrm{d}s$.]

13. Sia f_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = n(t-y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sia f il limite puntuale di f_n. Si stabilisca se f_n converge uniformemente a f in $[0, \infty)$.

[Si.]

14. Sia f_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 t \\ y(1) = \sqrt[n]{2} \end{cases}$$

Si studi la convergenza uniforme di f_n.

15. Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(2-y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

16. Sia

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x+1} y - \dfrac{1}{x^2-1} \sqrt{y} = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a. Si provi che per $y_0 > 0$ fissato esiste unica la soluzione locale del problema e la si determini; é possibile definirla su tutto $(-1, 1)$?

b.* Per $y_0 = 0$ si determinino almeno 3 soluzioni definite in $(-1, 1)$.

[a. Sol. locale: $y(x) = \left(\frac{\sqrt{y_0}+\log\sqrt{1-x}}{x+1}\right)^2$.]

17. Sia

$$\begin{cases} y' + \left(y^2 + y - \dfrac{3}{4}\right) \cos x = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Si determini $y_0 \in \mathbb{R}$ tale la soluzione del problema sia definita su tutto $\mathbb{R}$.

[$\frac{2y_0-1}{2y_0+3} \notin [e^{-2}, e^2]$.]

18. Sia $a \in \mathbb{R}$. Si determini la soluzione definita nel piú ampio intervallo del problema

$$\begin{cases} xy' = y(\log y + 1 - \log x) \\ y(1) = e^a \end{cases}$$

[$y(x) = xe^{ax}$ in $(0, \infty)$.]

19. Sia $a > 1$ e si consideri

$$\begin{cases} x^2 y' = y^3 - y \\ y(2) = a \end{cases}$$

a. Si provi che esiste unica la soluzione locale y_a e la si determini.

b. Si provi che esiste $\alpha > 1$ tale che per ogni $a \in (1, \alpha]$ la soluzione y_a puó essere definita su tutto $(0, \infty)$.

c. Quali soluzioni y_a possono essere estese su tutto $\mathbb{R}$?

[b. $\alpha = \sqrt{\frac{e}{e-1}}$.]

20. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y'' \cos^3 x + y' \cos^2 x \sin x = 6 \sin x - 4 \cos^2 x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

a. Si provi che esiste unica la soluzione locale e la si determini.

b. Si determini l'intervallo massimale di definizione.

[b. $(-\pi/2, \pi/2)$.]

21. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = e^x \sqrt[3]{1-y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a. Si studi l'esistenza e l'unicitá di soluzioni locali al variare di (x_0, y_0).

b. Si determinino tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ nel caso $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

[b. $y(x) = 1$ e per ogni $x_0 \le 2$ anche $y^{\pm}(x) = \begin{cases} 1 \pm [2(e^{x_0} - e^x)/3]^{3/2} & \text{se } x \le x_0 \\ 1 & \text{se } x > x_0 \end{cases}$]

22. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' - 2y = 2(e^x + x)\sqrt{y} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

a. Si studi l'esistenza e l'unicitá di soluzioni locali;

b.* per $x_0 = 0$, si determinino tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

[b. Per ogni α sia $g_\alpha(x) = [(\alpha + 1 - \alpha e^\alpha)e^{x-\alpha} + xe^x - x - 1]^2$ e β tale che $e^\beta + \beta = 0$. Sono soluzioni $y_\alpha(x) = \begin{cases} g_\alpha(x) & \text{se } x \ge \alpha \\ 0 & \text{se } x < \alpha \end{cases}$ per $\alpha \ge 0$, $y_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \ge \alpha \\ g_\alpha(x) & \text{se } x < \alpha \end{cases}$ per $\alpha \le \beta$, $y(x) = 0$.]

23. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{t} y + 4t^2\sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Si determinino tutte le soluzioni locali del problema.

[$y(x) = 0$ e $\forall \alpha \ge 1$ $y_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le \alpha \\ (t(t^2 - \alpha^2))^2 & \text{se } x > \alpha \end{cases}$.]

24. Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Si determinino le 4 soluzioni locali del problema.

25. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x + y + 3) \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

[$y(x) = -2\arctan\left(1 + \frac{2}{x-2}\right) - x - 3$.]

26. Si determinino tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 5y^{4/5} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

27. Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - xy}{1 + x^2} \\ y(1) = a \end{cases}$$

ha un massimo o un minimo relativo in $x = 1$.

[$a = 1$ massimo relativo, $a = 0$ massimo e minimo relativo.]

28. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi \end{cases}$$

nel suo intervallo massimo di definizione.

[$y(x) = \pi - \arcsin(x + x^2)$ in $((-1-\sqrt{5})/2, (-1+\sqrt{5})/2)$.]

29.* Si determini il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a. per $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$, si determinino tutte le soluzioni nel loro intervallo massimo di definizione e ne si tracci un grafico accurato;

b. per $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e per $(x_0, y_0) = (1/2, -1)$, si determinino tutte le soluzioni nel loro intervallo massimo di definizione;

c. si determinino i punti (x_0, y_0) tale che l'unica soluzione locale del problema di Cauchy sia $C^\infty(-1, 1)$.

[a. $y(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in (-1, \sqrt{3}/2) \\ 1 & \text{se } x \in [\sqrt{3}/2, 1) \end{cases}$; c. $x_0 = y_0 \in (-1, 1)$.]

30. Per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-1)(y-4)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ y(3\pi/2) = 5 \end{cases}$$

a. si determini la soluzione locale del problema;

b. si determinino tutte le soluzioni definite su $\mathbb{R}$.

[a. $y(x) = \frac{16 - |\sin x|^3}{4 - |\sin x|^3}$.]

31. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si studi l'esistenza e l'unicitá di soluzioni in $C^1(\mathbb{R})$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^3 y' = y - 1 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

[se $\alpha \neq 1$ non ci sono soluzione, se $\alpha = 1$ ce ne sono infinite.]

32. Si stabilisca per quali α non negativi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy + y^3 = 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

é definita su tutto $\mathbb{R}$.

[$\alpha \in [0, \pi^{-1/4}]$.]

33. Per ogni $\alpha > 0$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4y - 4\sqrt[4]{y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a. verificare che ammette un'unica soluzione locale e determinarla esplicitamente: individuare l'intervallo massimale di definizione della soluzione;

b. é possibile prolungare la soluzione a tutto su $\mathbb{R}$? In quanti modi?

c. Si consideri ora il caso $\alpha = 0$; quante soluzioni locali ammette il problema di Cauchy ? Determinarle tutte.

[a. $y(x) = ((\alpha^{3/4} - 1)e^{3x} + 1)^{4/3}$; b. sempre in modo unico; c. infinite.]

34. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y' + 2\sqrt{y'}e^{x/2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si verifichi che ammette un'unica soluzione locale e determinarla esplicitamente: si stabilisca se é possibile prolungare la soluzione su tutto $\mathbb{R}$ e si determinino tutti i modi possibii.

[Una sola soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$, $y(x) = \begin{cases} 2/e - 1 & se\ x \leq -1 \\ e^x(x^2+1) - 1 & se\ x > -1 \end{cases}$.]

35. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'ty = t^2 + y^2 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$; nel caso $y_0 = -2$, si determini la soluzione del problema nell'intervallo massimale.

[$y(t) = -t\sqrt{2\ln t + 4}$ in (e^{-2}, ∞).]

36. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)y' = \dfrac{1-e^y}{e^y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$; si determini la soluzione del problema nell'intervallo massimale. Per quali α la soluzione può essere definita su tutto $\mathbb{R}$?

[se $\alpha > 0$, $y(x) = \log\left(1 + \frac{e^\alpha - 1}{x+1}\right)$ in $(-1, \infty)$; se $\alpha = 0$, $y(x) = 0$; se $\alpha < 0$, $y(x) = \log\left(1 + \frac{e^\alpha - 1}{x+1}\right)$ in $(-e^\alpha, \infty)$.]

2 Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

1. Si considerino

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(1/2)t^2+t} \\ -e^{-(1/2)t^2+t} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1(t) \\ \widetilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(1/2)t^2+t} + e^{-(1/2)t^2+t} \\ -e^{-(1/2)t^2+t} + e^{(1/2)t^2+t} \end{pmatrix}$$

Esiste un sistema lineare omogeneo avente come soluzioni particolari $\mathbf{x}$ e $\widetilde{\mathbf{x}}$? Se si, lo si scriva.

$$\left[\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + tx_2(t) \\ x_2'(t) = tx_1(t) + x_2(t) \end{cases} \right]$$

2. Siano

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}$$

soluzioni dell'omogenea del sistema $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)$. Si determini $\mathbf{A}(x)$.

2.1 Lineari a coefficienti costanti

1. Si calcolino le matrici $e^{\mathbf{A}}$ con

a. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.1.1 Omogenei

1. Si integrino i seguenti sistemi di equazione differenziali

a. $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^t \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \end{array} \right]$

b. $\begin{cases} x' = -4y \\ y' = x \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t \\ y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \end{array} \right]$

c. $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x(t) = 2c_1 e^t + c_2 e^t (2t+1) \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 e^t t \end{array} \right]$

d. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^t \\ y(t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^t \end{array} \right]$

e. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ y(t) = c_1 \cos t - c_2 \sin t \end{array} \right]$

f. $\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$

g. $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = x - y \end{cases}$

h. $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x + 2y \end{cases}$

i. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

l. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

2. Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

a. $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = -2y \\ x(0) = 0 \qquad y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x(t) = 3te^{-2t} \\ y(t) = e^{-2t} \end{array} \right]$

3. Si integrino i seguenti sistemi di equazione differenziali

a. $\begin{cases} x' = x + 3y - 2z \\ y' = 2y + 4z \\ z' = y + 2z \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x(t) = \frac{2}{3} c_3 e^{4t} - 4c_2 + c_1 e^t \\ y(t) = c_2 + c_3 e^{4t} \\ z(t) = \frac{1}{2} c_3 e^{4t} - \frac{1}{2} c_2 \end{array} \right]$

b. $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x(t) = 2c_3 e^t \\ y(t) = \frac{1}{2} e^t (2c_1 \cos(2t) + 2c_2 \sin(2t) - 3c_3 \cos(2t) - 3c_3) \\ z(t) = \frac{1}{2} e^t (2c_1 \sin(2t) - 2c_2 \cos(2t) - 3c_3 \sin(2t) + 2c_3) \end{array} \right]$

c. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = y + z \\ z' = 0 \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x(t) = c_2 e^t + c_1 \\ y(t) = -c_3 + c_2 e^t \\ z(t) = c_3 \end{array} \right]$

d. $\begin{cases} x' = -3x \\ y' = 3y - 2z \\ z' = y + z \end{cases}$

4. Si risolvano i problemi di Cauchy $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, dove

a. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{l} x(t) = 2te^t \\ y(t) = e^t \\ z(t) = 0 \end{array}\right]$

d. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 6 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{l} x(t) = e^{2t} - e^{3t} \\ y(t) = 4e^{2t} - 3e^{3t} \\ z(t) = e^{3t} - e^{2t} \end{array}\right]$

e. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2.1.2 Non omogenei

A volte puó essere utile riscrivere il sistema come un'equazione differenziale di ordine n e usare il metodo di variazione delle costanti arbitrarie

1. Si integrino i seguenti sistemi di equazione differenziali

   a. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x(t) = 2c_1e^{2t} + c_2e^{-t} - \frac{3}{2}e^t \\ y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} - e^t \end{array}\right]$

   b. $\begin{cases} x' = 3x + t \\ y' = y + 1 \\ z' = y + z \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x(t) = c_1e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{t}{3} \\ y(t) = c_2e^t - 1 \\ z(t) = c_2te^t + c_3e^t + 1 \end{array}\right]$

   c. $\begin{cases} x' = 2x + y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -3x - y - \dfrac{1}{1 + e^{4t}} \end{cases}$

   e. $\begin{cases} x' = 3x + y - e^{2t} \\ y' = 2x + 2y - e^{2t} \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x(t) = c_1e^{4t} + c_2e^t + \frac{1}{2}e^{2t} \\ y(t) = c_1e^{4t} - 2c_2e^t + \frac{1}{2}e^{2t} \end{array}\right]$

   f. $\begin{cases} x' = 2x + y - e^{-2t} + 1 \\ y' = 4x - 2y - e^{-2t} + 3 \end{cases}$

   g. $\begin{cases} x_1' = x_2 + t + 1 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 - 2 \end{cases}$

   h. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 1 \\ x_2' = 2x_2 - x_3 - 1 \\ x_3' = 2x_3 \end{cases}$

2.* Si risolva

$$\begin{cases} tx' = 2x + y + t \\ ty' = x + 2y - t \\ x(e) = e \\ y(e) = -e \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} x(t) = t\log t \\ y(t) = -t\log t \end{array}\right]$

3. Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

   Si risolva il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$ nei casi in cui

   a. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$

4. Si risolvano

a. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - y + \dfrac{1}{\sin t} \\ x(\pi/2) = 0 \\ y(\pi/2) = \pi \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} x(t) = -\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\cos t + \sin t \log(\sin t) \\ y(t) = \left(\frac{\pi}{2} + t\right)(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\log(\sin t) \end{array}\right]$$

b. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + e^{2t} \\ x_2' = 2x_2 - x_3 \\ x_3' = 2x_3 \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' = y + \cos t \\ y' = z \\ z' = -2x - y - 2z \\ x(0) = y(0) = 0 \\ z(0) = -1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x' = 1234x + 5678y + 9z \\ y' = 5678x + 9y + 1234z \\ z' = 9x + 1234y + 5678z \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$

2.2 Esercizi vari

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + t \\ x_2' = x_1 - x_2 + \dfrac{1}{1 + \cos t} \\ x_1(0) = -2\log 2 \\ x_2(0) = -\log 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1(t) = -3\cos t + \sin t + t + 3 - 2t\sin t - 2\cos t \log(1 + \cos t) \\ x_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + t - t\sin t - \cos t \log(1 + \cos t) \end{array}\right]$$

2. Si integri il seguente sistema

$$\begin{cases} u' - 4v = \sin x \\ v' - u - 3v = x \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - x + \frac{3}{4} + \frac{6}{17}\sin x - \frac{7}{17}\cos x \\ v(x) = \frac{1}{4}\left(-c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{4x} - 1 + \frac{6}{17}\cos x - \frac{10}{17}\sin x\right) \end{array}\right]$$

3. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_4 \\ x_2' = x_1 - x_3 \\ x_3' = -x_2 + x_4 \\ x_4' = -x_1 + x_3 \\ x_1(0) = x_4(0) = 1 \\ x_2(0) = x_3(0) = -1 \end{cases}$$

$$[x_1(t) = x_4(t) = -x_2(t) = -x_3(t) = e^{-2t}]$$

4. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \dfrac{1}{\cos^3 t} \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x(t) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2\cos t} \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{\sin t}{2\cos^2 t} \end{array}\right]$$

3 Equazioni differenziali di ordine superiore al primo

3.1 Lineari a coefficienti costanti

3.1.1 Metodo di verosimiglianza

1. Si integrino le seguenti equazioni

a. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ *[$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x},\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

b. $y^{(4)} - 3y''' = 0$ *[$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{3x},\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

c. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$ *[$y(x) = c_1 + c_2e^{-2x}\cos 3x + c_3e^{-2x}\sin 3x,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

d. $y^{(6)} - y^{(4)} - y'' + y = 0$ *[$y(x) = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x} + c_5\cos x + c_6\sin x,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

e. $y'' + 6y' + 9y = 0$ *[$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x},\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

f. $y^{(4)} - 3y''' = x + 1$ *[$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{3x} - x^3(\frac{x}{72} + \frac{2}{27}),\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

g. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$ *[$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3x^2e^{-2x},\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

h. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$ *[$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x},\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

i. $y''' + y = 0$ *[$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

l. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$ *[$y(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3\cos x + c_4\sin x,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

m. $y''' - 3y' + 2y = x^2e^x$ *[$y(x) = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + c_3e^{-2x} + \left(\frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{1}{27}\right)x^2e^x,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

n. $y^{(4)} + 2y'' = x^2$ *[$y(x) = c_1 + c_2x + c_3\cos\sqrt{2}x + c_4\sin\sqrt{2}x + \frac{x^2}{4}(\frac{x^2}{6} - 1),\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

o. $3y'' + 8y' + 4y = e^{-x} + \sin x$ *[$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-\frac{2}{3}x} - e^{-x} + \frac{1}{65}\sin x - \frac{8}{65}\cos x,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

p. $y'' - 2y' + y = x^3 - 6x^2$ *[$y(x) = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + x^3 - 6x - 12,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

q. $y'' - 2y' + y = e^x + e^{2x}$ *[$y(x) = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + \frac{1}{2}x^2e^x + e^{2x},\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

r. $y'' - 2y' + y = e^x + \sin x$ *[$y(x) = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{2}\cos x,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

s. $y^{(4)} - y = e^x\cos x$

t. $y^{(4)} - y = xe^x\sin x$

2. Si risolvano

a. $\begin{cases} y'' + y' = t^2 + 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ *[$y(t) = -3 + 3t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 3e^{-t}$.]*

b. $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ *[$y(x) = e^{-x}(e^{-x} - 1 + x)$.]*

c. $\begin{cases} y''' + 3y'' + 3y' + y = 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 3 \end{cases}$ *[$y(x) = e^{-x}(1 + x + x^2) + 1$.]*

d. $\begin{cases} y''' + 9y' = 2\cos x - \sin x \\ y(\pi) = -9/8 \\ y'(\pi) = 11/4 \\ y''(\pi) = 73/8 \end{cases}$ *[$y(x) = \frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{4}\sin x + \cos(3x) - \ sin(3x)$.]*

e. $\begin{cases} y''' + 2y'' + 2y' + y = x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$ *[$y(x) = e^{-x} + e^{-x/2}(\cos(\sqrt{3}x/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x/2)) + x - 2$.]*

f. $\begin{cases} y''' + y'' + y' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$ *[$y(x) = 1 - \frac{1}{2}(e^{-x} + \cos x + \sin x)$.]*

g. $\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 2e^{3x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ *[$y(x) = \frac{1}{2}(e^{5x} - e^{3x} - 2xe^{3x})$.]*

3. Si trovi un integrale particolare delle seguenti equazioni

a. $y'' - 4y' + 4y = x^{30}e^{2x}$

b. $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = t^{32}e^{-t}$

4. Si scriva una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che abbia per soluzioni particolari tutte le funzioni date

a. $y_1 = 1, \qquad y_2 = x, \qquad y_3 = x^2, \qquad y_4 = e^x$

b. $y_1 = e^{-2x}, \qquad y_2 = e^{2x}, \qquad y_3 = e^{2x}x, \qquad y_4 = cosx$

c. $y_1 = e^{-3x}\sin x \cos x, \qquad y_2 = e^{-3x}\cos 2x, \qquad y_3 = e^{3x}$

5. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \alpha \end{cases}$$

verifica la relazione $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$.

[$\alpha < -1$.]

3.1.2 Con metodo di variazione delle costanti arbitrarie

1. Si integrino le seguenti equazioni

a. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ *[$y(x) = \cos x \log(\cos x) + x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

b. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$

c. $y'' + 2y' + y = \dfrac{\log x}{e^x}, \qquad x > 0$ *[$y(x) = e^{-x}\left(c_1 + c_2x + (2\ln(x) - 3)x^2/4\right),\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

2. Si risolvano

a. $\begin{cases} x'' - 4x = \dfrac{4}{1+e^{4t}} \\ x(0) = -\pi/4 \\ x'(0) = -1 \end{cases}$ *[$x(t) = \left(\frac{1}{2} - \arctan e^{2t}\right)\cosh(2t) - \frac{1}{2}$.]*

b. $\begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ *[$y(x) = \frac{\sin^2 x}{2\cos x}$.]*

c. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x+2} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y'' - y = \dfrac{1}{\cosh x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

3.2 Lineari a coefficienti non costanti

3.2.1 Equazioni di Eulero I

1. Si integrino le seguenti equazioni

a. $x^2y'' + xy' + y = 1$ *[$y(x) = c_1 \cos\log|x| + c_2 \sin\log|x| + 1,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

b. $(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$, per $x > -1$
[$y(x) = (c_1 + c_2\log(1+x))(1+x)^2 + (1+x)^3,\ c_i \in \mathbb{R}$.]

c. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ *[$y(x) = c_1x^3 + c_2\frac{1}{x},\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

d. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$ *[$y(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + \frac{1}{2}x,\ c_i \in \mathbb{R}$.]*

e. $x^2y'' + 5xy' + 3y = \dfrac{1}{x}$

2. Si discuta l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale dei seguenti problemi di Cauchy e la si determini:

a. $\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ *[$y(x) = 2x^2(1 - 2\log x)$.]*

b. $\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = 2x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$ *[$y(x) = x(\log x + \log^2 x)$.]*

c. $\begin{cases} x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 3 \\ y''(1) = 6 \end{cases}$ *[$y(x) = x^3$.]*

d. $\begin{cases} x^2y'' + xy' + 9y = \log(27x) \\ y(e^\pi) = \dfrac{\log 3}{3} + \dfrac{\pi}{9} \\ y'(e^\pi) = 0 \end{cases}$

3. Si risolva in almeno tre modi

$$(3x + 2)y'' + 7y' = 0$$

[$y(x) = c_1 + c_2(3x + 2)^{-4/3}$, $c_i \in \mathbb{R}$.]

3.2.2 Equazioni di Eulero II (con metodo di variazione delle costanti arbitrarie)

1. Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni

a. $x^2y'' + 4xy' + 2y = \cos x, \qquad x > 0$ *[$y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2 - \cos x}{x^2}$, $c_i \in \mathbb{R}$.]*

b. $x^2y'' + xy' - y = -\dfrac{x^2}{x + 2}, \qquad x > 0$

3.3 Esercizi vari

1. Per ogni intero n positivo, sia f_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1/n \end{cases}$$

Si studi la convergenza uniforme di f_n.

[Convergenza uniforme in ogni insieme inferiormente limitato.]

2. Per ogni intero n positivo, sia y_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{n}y'' + 2y' - 1 = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Si determini il piú ampio insieme di convergenza uniforme di y_n.

[$(-\infty, 0]$.]

3. Le funzioni

$$y_1(x) = xe^2 \qquad y_2(x) = (x + 1)e^x \qquad y_3(x) = x(x + e^x)$$

sono integrale particolari di una equazione differenziale del secondo ordine lineare. La si determini. *[$x(2 - x)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y + (x^2 - 4x + 2)e^x = 0$.]*

4. Si risolva
$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + y = \log x \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$$
[$y(x) = \cos\log x + \log x$.]

5. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si determini l'integrale generale di
$$x^{(iv)} + (1-a)x''' - ax'' = (t+1)$$

6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si determini la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} x^3z''' + (3-a)x^2z'' + (1-a+a^2)xz' - a^3z = \log x \\ z(1) = z'(1) = 0 \\ z''(1) = 1 \end{cases}$$
[se $a = 0$, $z(x) = \ln^2 x + \frac{1}{24}\ln^4 x$; se $a \neq 0$, $z(x) = \frac{a^2+1}{2a^4}x^a - \frac{a^2-1}{2a^4}(\sin(a\ln x) + \cos(a\ln x)) - \frac{1}{a^3}\ln x - \frac{1}{a^4}$.]

7. Determinare due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale
$$x^2y'' + 4xy' + (2+x^2)y = 0$$
nell'intervallo $(0,\infty)$, cercandole nella famiglia $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$. Si risolva il problema di Cauchy
$$\begin{cases} x^2y'' + 4xy' + (2+x^2)y = x^2 \\ y(\pi) = y'(\pi) = 1 \end{cases}$$
[$y(x) = (-\pi^2\sin x - 2\cos x + x^2 - 2)/x^2$.]

8. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} x^2y'' - 2y = 0 \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$
   a. Si stabilisca al variare di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione $y_{a,b}$ e, quando possibile, la si determini.
   b. Si determinino $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ in modo tale che $y_{a,b}$ possa essere definita su tutto $\mathbb{R}$.
   c. Si determinino, al variare di $c \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni del problema
$$\begin{cases} x^2y'' - 2y = 0 \\ y(0) = c \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
[a. $y_{a,b}(x) = \frac{1}{3}\left((a+b)x^2 + \frac{2a-b}{x}\right)$.]

9. Si determini l'integrale generale della seguente equazione
$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3e^{2x}$$
cercando per l'equazione dell'omogenea associata soluzioni della forma $y(x) = e^{\alpha x}$ e $y(x) = x^3e^{\beta x}$.
[$y(x) = (c_1 + c_2x^3)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$, c_i costanti.]

10. Si consideri l'equazione differenziale
$$x^2y'' - xy' - 8y = -6x^4$$
   a. Si determinino tutte le soluzioni definite in $(-\infty,0)$ e in $(0,\infty)$;
   b. si determinino tutte le soluzioni che sono in $C^2(\mathbb{R})$ e con un punto stazionario in $x = 1/2$.

[b. $y(x) = \begin{cases} (-\log 2 + 1/4 - \log x)x^4 & \text{se } x \geq 0 \\ (c - \log|x|)x^4 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ per ogni costante c.]

11. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - x' + 2e^{-t} = 0 \\ x' - y' - y + 2te^{t} = 0 \\ x(0) = y(0) = 0 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x(t) = e^{t} - e^{-t} \\ y(t) = t(e^{t} + e^{-t}) \end{array} \right]$$

12. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

[$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos x \left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x} \right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) \right] + \sin x \left[1 + \arctan(\sin x)\right]$*]*

13. Si risolva il problema

$$\begin{cases} x^2 y'' - xy' + y = x^2 \log|x| \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

14. Si consideri il problema

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 4y = \dfrac{x^3}{2} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

a. Si discuta l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione del problema;

b. si determinino tutte le soluzioni del problema di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

[b. $y(x) = cx^2 + x^3/2,\ c \in \mathbb{R}$*]*

15. Si determini l'integrale generale di

$$\begin{cases} 4x'' + x + y = \sin t \\ y' + x + y = \cos t \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t/2} + c_3 - \frac{4}{25}\sin t + \frac{3}{25}\cos t \\ y(t) = (4c_2 - 2c_1 - 2c_2 t)e^{-t/2} - c_3 + \frac{13}{25}\sin t + \frac{9}{25}\cos t \end{array} \right]$$

16. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = \dfrac{e^x}{1 + e^x} \\ y(0) = -1/2 \\ y'(0) = 1/2 - \log 2 \end{cases}$$

[$y(x) = (e^x\,(x - \log(1 + e^x)) + e^{-x}\log(1 + e^x) - 1)/2.$*]*

17. Si consideri l'equazione differenziale

$$25x^2 y'' + 25xy' - 36y = 3x.$$

a. Determinare le soluzioni definite su $(0, \infty)$ che ammettono asintoto obliquo a $+\infty$;

b. determinare le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

[a. $y(x) = -\frac{3}{11}x + cx^{-6/5}$*; b.* $y(x) = -\frac{3}{11}x.$*]*

18. Si determinino tutte le sue soluzioni locali di

$$\begin{cases} x^2 y'' - 20y = 9x^7 - 3x^2 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

[$y(x) = \begin{cases} \frac{9}{22}x^7 + \frac{1}{6}x^2 + c_1 x^5 & \textit{se } x \geq 0 \\ \frac{9}{22}x^7 + \frac{1}{6}x^2 + c_2 x^5 & \textit{se } x < 0 \end{cases}$ *per ogni* $c_i \in \mathbb{R}.$*]*