IL TEST DEL χ^2

Per decidere se i risultati di un esperimento reale sono governati dalla distribuzione limite attesa si utilizza il procedimento chiamato il *Test* χ^2 .

Consideriamo un esperimento nel quale misuriamo un numero x e per il quale abbiamo ragione di aspettarci una certa distribuzione di risultati. Immaginiamo di ripetere la misura N volte e dopo aver diviso l'escursione dei possibili risultati x in $n+1$ intervalli, $k=1, \dots, n+1$, contiamo il numero O_k di osservazioni che cadono in ciascun intervallo k . Assumendo che le misure siano effettivamente governate dalla distribuzione attesa, calcoliamo il numero atteso e_k delle misure nell'intervallo k -esimo.

Una valutazione della discrepanza tra la distribuzione osservata e quella attesa è data dalla quantità

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(o_k - e_k)^2}{e_k}$$

L'indice della sommatoria corre sul numero delle classi in cui è stato suddiviso l'intervallo di dispersione. Deve inoltre valere la condizione che la somma delle frequenze osservate e di quelle attese deve esser uguale al numero di prove.

$$\sum_{k=1}^n o_k = \sum_{k=1}^n e_k = N$$

Ovviamente, se il valore della variabile χ^2 è zero, l'accordo tra i dati sperimentali e quelli attesi è perfetto.

Se esiste concordanza tra la distribuzione osservata e quella attesa ci si aspetta che il valore di ogni termine della somma del χ^2 sia piccolo, e si considera accettabile uno scarto <1 . Ne consegue quindi che se $\chi^2 < n$ l'accordo è accettabile; mentre se $\chi^2 \gg n$ vi è un disaccordo significativo.

Esempio

Supponiamo di contare con un Geiger il numero di particelle che arrivano in 100 intervalli separati di 1 minuto. I risultati sono riportati nelle prime due colonne :

conteggi v in 1 minuto	Occorrenza	Classe k	Osservazioni o_k	Numero atteso e_k	$\frac{(o_k - e_k)^2}{e_k}$
0	7	1	7	7.5	0.03
1	17	2	17	19.4	0.30
2	29	3	29	25.2	0.57
3	20	4	20	21.7	0.13
4	16	5	16	14.1	0.31
5	8	6	11	12.1	0.10
6	1	7			
7	2	8			
>8	0	9			
TOTALE	100	10			

L'ipotesi che vogliamo verificare è che il numero v è governato da una distribuzione di Poisson $p_\mu(v)$.

$$P_\mu(k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

Poichè il conteggio medio μ è incognito, calcoliamo la media v delle 100 misure di conteggio. $\langle v \rangle = 2.59$ che ci dà la miglior stima di μ . Usando questo valore $v = 2.59$, possiamo calcolare la probabilità $p_\mu(v)$ di ogni particolare conteggio v e quindi calcolare i numeri attesi E_k come riportati nell'ultima colonna. Calcolando, risulta

$$\chi^2 = \sum_{k=0}^n \frac{(o_k - e_k)^2}{e_k} = 1.45$$

Poiché questo valore è $< n$ si può concludere che l'accordo tra le nostre osservazioni e la distribuzione di Poisson attesa è soddisfacente.

Come esempio supponiamo di lanciare 120 volte un dado allo scopo di controllare se il dado è buono o truccato e di ottenere la distribuzione di frequenze riportata nella tabella seguente

Uscita	1	2	3	4	5	6
Osservati	17	23	21	25	15	19
Attesi	20	20	20	20	20	20

I valori attesi sono dati dal calcolo delle probabilità: essendo la probabilità di ottenere un qualsiasi numero $1/6$, su 120 lanci il valore atteso sarà $120 * 1/6 = 20$.

Il χ^2 vale dunque 3,5. Questo numero ci dà una misura della deviazione osservata della distribuzione dall'ipotesi teorica. Ma 3,5 è una deviazione grande o piccola?

Per rispondere a questa domanda occorre studiare la distribuzione della variabile χ^2 che permette di calcolare la probabilità che il χ^2 abbia un certo valore; la probabilità dipende anche dal numero N dei gradi di libertà (che è il numero dei parametri che possiamo dare liberamente senza violare i vincoli del problema. In questo caso ci sono sei frequenze attese, ma dovendo essere il totale pari a 120, solo 5 frequenze sono libere e dunque $N = 5$)

I manuali di statistica riportano tabelle del χ^2 e oggi molti software hanno funzioni χ^2 già pronte, per esempio Excel ha tre funzioni relative al test χ^2

=**DISTRIB.CHI(C; N)**: calcola la probabilità che per N gradi di libertà il χ^2 sia maggiore di C ; nel nostro esempio =**DISTRIB.CHI(3.5; 5)** = 0,6234 probabilità che $\chi^2 > 3.5$.

- =**TEST.CHI(O; A)**: calcola la probabilità che dati i valori attesi A si osservino i valori O o valori ancor più distanti da quelli attesi; nel nostro esempio si scriverà: =**TEST.CHI(B2:B7; C2:C7)** = 0,6234 (come sopra, ovviamente).

- =**INV.CHI(P; N)**: calcola per N gradi di libertà il valore di χ^2 tale che sia P la probabilità di avere un χ^2 maggiore o uguale a quello; nel nostro esempio =**INV.CHI(0.6234; 5)** dà ovviamente 3.5; in altre parole per 5 gradi di libertà e una probabilità del 62.34% il valore limite di χ^2 è 3,5.

Nel nostro esempio il valore di χ^2 pari a 3,5 ha una probabilità del 62,34%, nel senso che ci sono 62,34% probabilità che in 120 lanci di dadi si riscontrino deviazioni dalla media uguali o maggiori di questa (con $\chi^2 > 3,5$). Dobbiamo quindi concludere che non c'è motivo di sospettare che il dado sia truccato.

Va detto che anche valori troppo piccoli del χ^2 , troppo buoni insomma, possono dare adito a sospetti!

In questi casi di solito si considerano critici valori di probabilità di 0.10, 0.05, 0.01 e si effettuano test a questi livelli; se la probabilità risulta minore di questi vuol dire che si è verificato qualcosa di molto improbabile e che quindi c'è da sospettare che l'ipotesi sia sbagliata (qui che il dado non sia buono nel senso di avere probabilità uguali per tutte le facce).

Molti libri di statistica usano valori complementari a quelli usati da Excel e OO Calc; invece di una probabilità di 0,6234 qui avremmo ottenuto 0,3766 che è la probabilità di avere un χ^2 minore di quello ottenuto. In questi libri i test di cui sopra sono riportati come test allo 0.90, allo 0.95, allo 0.99.

Come esempio supponiamo di lanciare 120 volte un dado allo scopo di controllare se il dado è buono o truccato e di ottenere la distribuzione di frequenze riportata nella tabella qui a destra:

I valori attesi sono dati dal calcolo delle probabilità: essendo la probabilità di ottenere un qualsiasi numero $1/6$, su 120 lanci il valore atteso sarà $120 * 1/6 = 20$.

Deviazione e Varianza	
MEDIA.DEV	Restituisce la media delle deviazioni assolute dei dati dalla loro media
<u>DEV.ST</u>	Restituisce la deviazione standard di un insieme di valori forniti (che rappresentano un campione di una popolazione) (Sostituita dalla funzione DEV.ST.C in Excel 2010)
<u>DEV.ST.C</u>	Restituisce la deviazione standard di un insieme di valori forniti (che rappresentano un campione di una popolazione) (Nuova in Excel 2010 - sostituisce la funzione DEV.ST)
DEV.ST.VALORI	Restituisce la deviazione standard di un insieme di valori forniti (che rappresentano un campione di una popolazione), conteggiando i valori testuali e il valore logico FALSO come 0 e il valore logico VERO come 1
<u>DEV.ST.POP</u>	Restituisce la deviazione standard di un insieme di valori forniti (che rappresentano un'intera popolazione) (Sostituita dalla funzione DEV.ST.P in Excel 2010)
<u>DEV.ST.P</u>	Restituisce la deviazione standard di un insieme di valori forniti (che rappresentano un'intera popolazione) (Nuova in Excel 2010 - sostituisce la funzione DEV.ST.POP)
DEV.ST.POP.VALORI	Restituisce la deviazione standard di un insieme di valori forniti (che rappresentano un'intera popolazione), conteggiando i valori testuali e il valore logico FALSO come 0 e il valore logico VERO come 1
VAR	Restituisce la varianza di un insieme di valori forniti (che rappresentano un campione di una popolazione) (Sostituita dalla funzione VAR.C in Excel 2010)
VAR.C	Restituisce la varianza di un insieme di valori forniti (che rappresentano un campione di una popolazione) (Nuova in Excel 2010 - sostituisce la funzione VAR)
VAR.VALORI	Restituisce la varianza di un insieme di valori forniti (che rappresentano un campione di una popolazione), conteggiando i valori testuali e il valore logico FALSO come 0 e il valore logico VERO come 1
VAR.POP	Restituisce la varianza di un insieme di valori forniti (che rappresentano un'intera popolazione) (Sostituita dalla funzione VAR.P in Excel 2010)
VAR.P	Restituisce la varianza di un insieme di valori forniti (che rappresentano un'intera popolazione) (Nuova in Excel 2010 - sostituisce la funzione VAR.POP)
VAR.POP.VALORI	Restituisce la varianza di un insieme di valori forniti (che rappresentano un'intera popolazione), conteggiando i valori testuali e il valore logico FALSO come 0 e il valore logico VERO come 1
COVARIANZA	Restituisce la covarianza della popolazione (la media dei prodotti delle deviazioni di ciascuna coppia di dati in due set di dati) (Sostituita dalla funzione COVARIANZA.P in Excel 2010)
COVARIANZA.P	Restituisce la covarianza della popolazione (la media dei prodotti delle deviazioni di ciascuna coppia di dati in due set di dati) (Nuova in Excel 2010 - sostituisce la funzione COVARIANZA)
COVARIANZA.C	Restituisce la covarianza di un campione (la media dei prodotti delle deviazioni di ciascuna coppia di dati in due set di dati) (Nuova in Excel 2010)

Deviazione e Varianza	
CONFIDENZA	Restituisce l'intervallo di confidenza per una media della popolazione, usando una distribuzione normale (Sostituita dalla funzione CONFIDENZA.NORM in Excel 2010)
CONFIDENZA.NORM	Restituisce l'intervallo di confidenza per una media della popolazione, usando una distribuzione normale (Nuova in Excel 2010 - sostituisce la funzione CONFIDENZA)
CONFIDENZA.T	Restituisce l'intervallo di confidenza per una media della popolazione, utilizzando la distribuzione t di Student (Nuova in Excel 2010)
DEV.Q	Restituisce la somma dei quadrati delle deviazioni dei dati dalla relativa media campione