

Analisi Fattoriale

La rotazione della struttura fattoriale

Marcello Gallucci

Milano-Bicocca

I passaggi fondamentali

- 1) Scelta del modello fattoriale
- 2) Scelta del numero di fattori
- 3) Rotazione della struttura fattoriale**
- 4) Selezione delle variabili
- 5) Interpretazione dei fattori
- 6) Punteggi fattoriali

Struttura monofattoriale

- Quando decidiamo di considerare un solo fattore, la soluzione ottenuta inizialmente è quella ottimale
- Perciò non abbiamo bisogno di rotazione
- Perché?
- Per definizione, il primo fattore è quello che massimizza la varianza condivisa tra gli items
- Perciò, sarà già ottimale

Esempio

Varianza totale spiegata

Componente	Autovalori iniziali			Pesi dei fattori non ruotati		
	Totale	% di varianza	% cumulata	Totale	% di varianza	% cumulata
1	1.545	30.910	30.910	1.545	30.910	30.910
2	.954	19.087	49.997			
3	.859	17.176	67.173			
4	.832	16.645	83.818			
5	.809	16.182	100.000			

Metodo di estrazione: Analisi componenti principali.



Notiamo che la soluzione monofattoriale è chiaramente da preferire

Tutti gli items saturano sostanzialmente sul fattore



Matrice di componenti^a

	Componente
	1
v1 Scherzoso	.586
v2 Estroverso	.519
v3 Espansivo	.487
v4 Divertente	.582
v5 Colorito	.597

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

a. 1 componenti estratti

Soluzioni multifattoriali

- Consideriamo di aver misurato 9 aggettivi e vogliamo studiare le dimensioni sottostanti

Statistiche descrittive

	N	Minimo	Massimo	Media	Deviazione std.
v1 Scherzoso	300	.00	10.00	4.5667	2.13403
v2 Estroverso	300	.00	10.00	4.3800	2.04030
v3 Espansivo	300	.00	10.00	4.4133	2.33681
v4 Divertente	300	.00	10.00	4.6233	2.41126
v5 Colorito	300	.00	10.00	4.5833	2.06007
v13 Diligente	300	.00	10.00	4.6567	2.18511
v15 Sereno	300	.00	10.00	4.7300	2.18012
v16 Sicuro	300	.00	10.00	4.7167	2.37807
v17 Stabile	300	.00	10.00	4.5300	2.25226
Validi (listwise)	300				

Estrazione dei fattori

- Decidiamo quanti fattori estrarre

Componente	Autovalori iniziali			Totale
	Totale	% di varianza	% cumulata	
1	1.822	20.241	20.241	1.82
2	1.449	16.104	36.345	1.44
3	1.029	11.430	47.776	
4	.958	10.649	58.424	
5	.880	9.783	68.207	
6	.850	9.446	77.652	
7	.731	8.120	85.772	
8	.691	7.674	93.447	
9	.590	6.553	100.000	

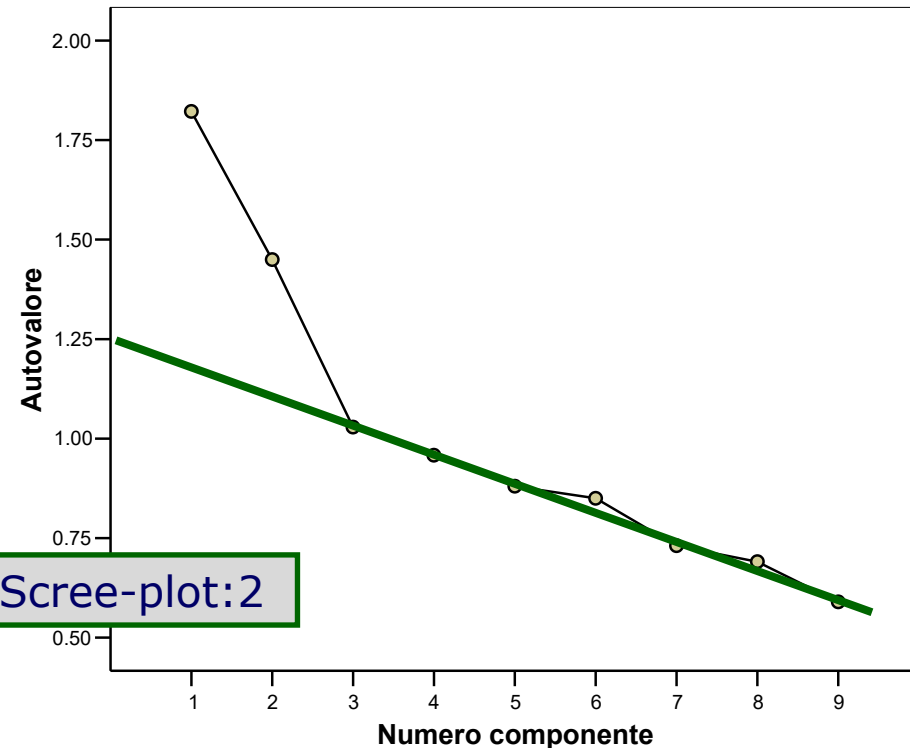
Varianza

Metodo di estrazione: Analisi componenti principali.

MinEigen:3

Teniamo 2 fattori

Grafico decrescente degli autovalori



Saturazioni Fattoriali

- Analizziamo la soluzione

Matrice di componenti^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	.212	.589
v2 Estroverso	.301	.417
v3 Espansivo	.233	.433
v4 Divertente	.546	.260
v5 Colorito	.354	.505
v15 Sereno	.643	-.304
v16 Sicuro	.492	-.453
v17 Stabile	.449	-.151
v13 Diligente	.592	-.313

Notiamo che molti items saturano meglio in un fattore, ma saturano anche sull'altro

Altri saturano su entrambi i fattori

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

a. 2 componenti estratti

Plot delle Saturazioni Fattoriali

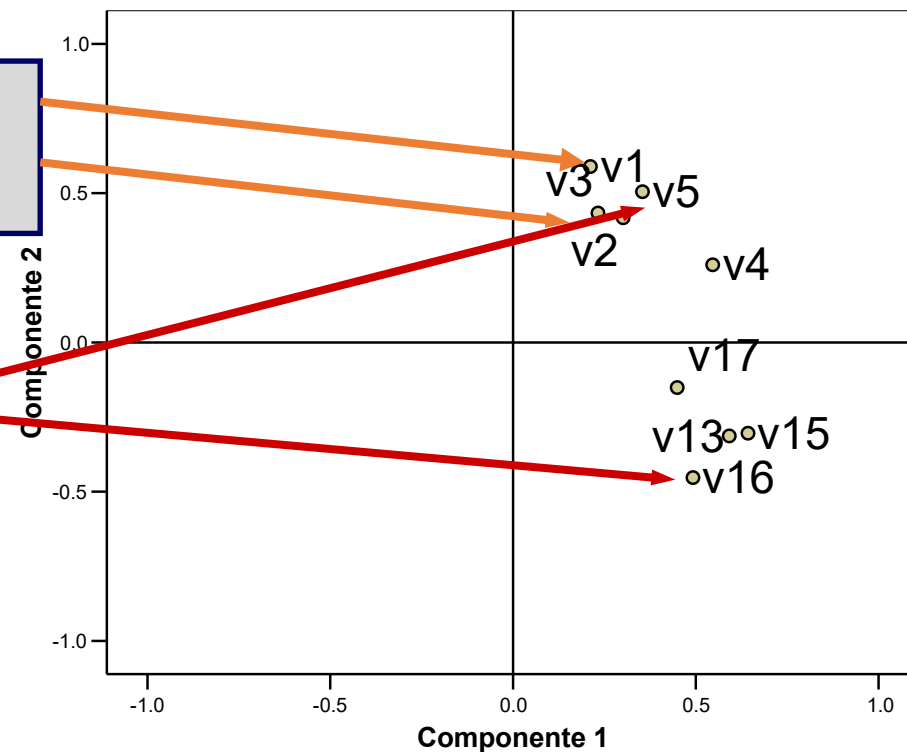
- Analizziamo la soluzione

Grafico componenti

Notiamo che molti items sembrano una combinazione di entrambi i fattori

Altri si posizionano al centro

Nessun item cade sull'asse, in modo tale da dare una chiara definizione al fattore



Soluzione complessa

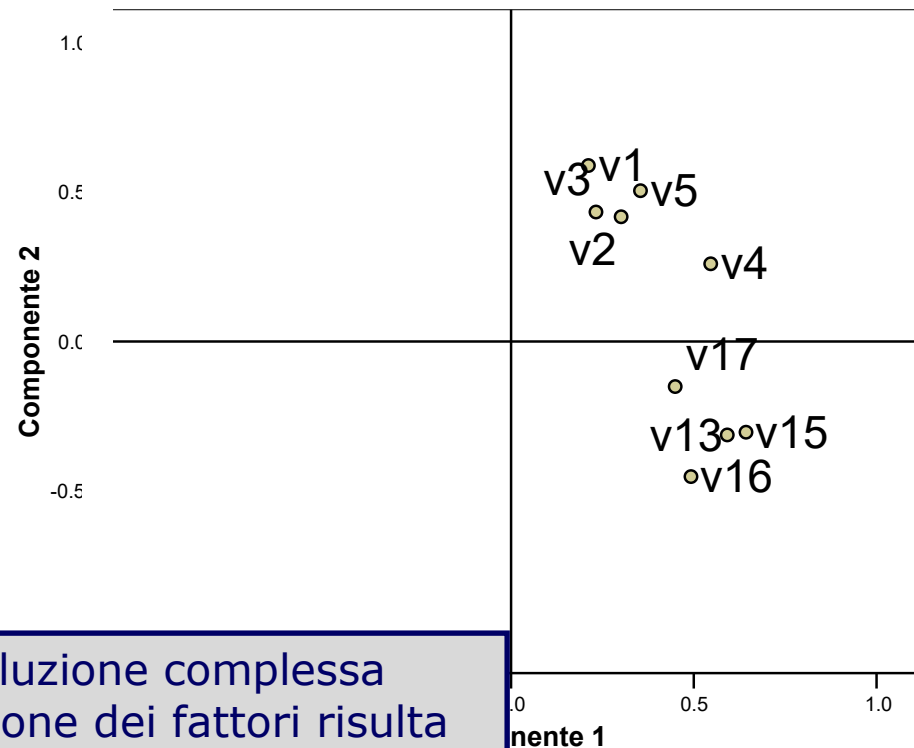
- Quando la soluzione non presenta items che cadono chiaramente su un solo fattore, ma presenta molti items complessi (a metà strada), la soluzione si dice **complessa**

Matrice di component^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	.212	.589
v2 Estroverso	.301	.417
v3 Espansivo	.233	.433
v4 Divertente	.546	.260
v5 Colorito	.354	.505
v15 Sereno	.643	-.304
v16 Sicuro	.492	-.453
v17 Stabile	.449	-.151
v13 Diligente	.592	-.313

Metodo estrazione: analisi

a. 2 componenti estratti

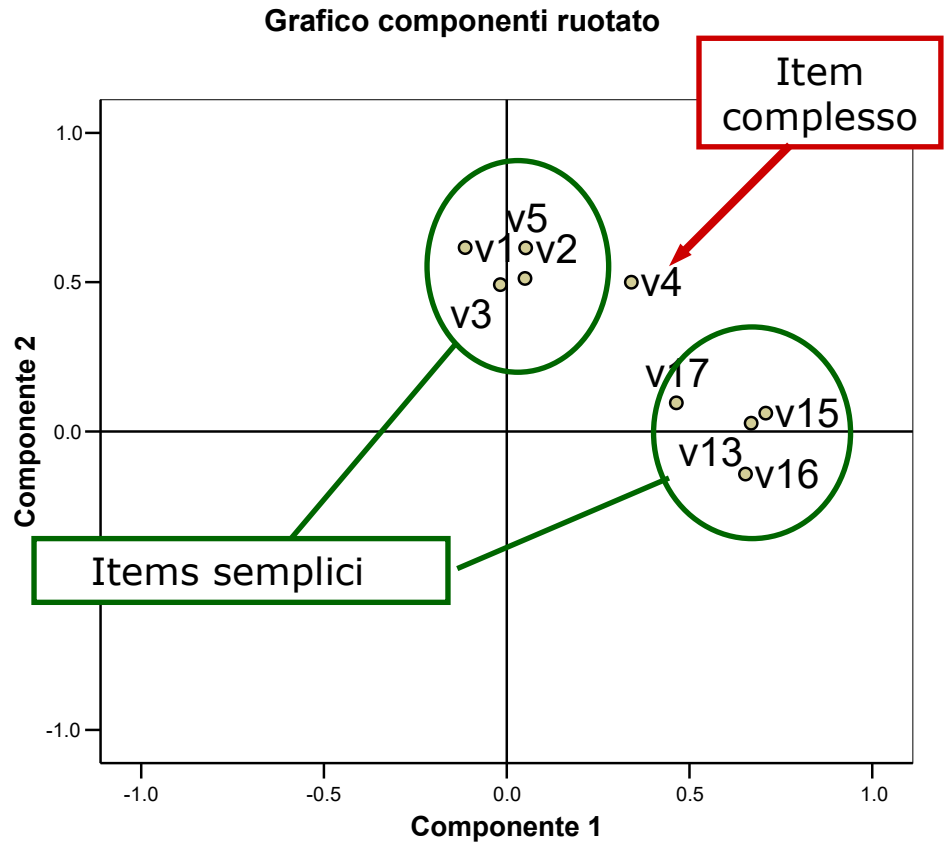


In una soluzione complessa
l'interpretazione dei fattori risulta
molto difficile e dubbia

Soluzione Semplice

- L'interpretazione risulta più semplice quando la soluzione è semplice

- Soluzione è idealmente semplice (Thurstone):
 - **Ogni item ha una sola saturazione sostanziale**
- Soluzione è praticamente semplice:
 - **Il numero di items in posizioni interstiziali è relativamente piccolo (ad es., <10% di items)**



Struttura semplice ideale (Thurstone, 1947)

- Soluzione è semplice ideale (Thurstone):
 - **Ogni item ha una sola saturazione sostanziale**
 - **Non vi sono posizioni interstiziali**

	F1	F2
v1	1	0
v2	1	0
v3	1	0
v4	1	0
v5	1	0
v6	0	1
v7	0	1
v8	0	1
v9	0	1
v10	0	1

Interpretazione

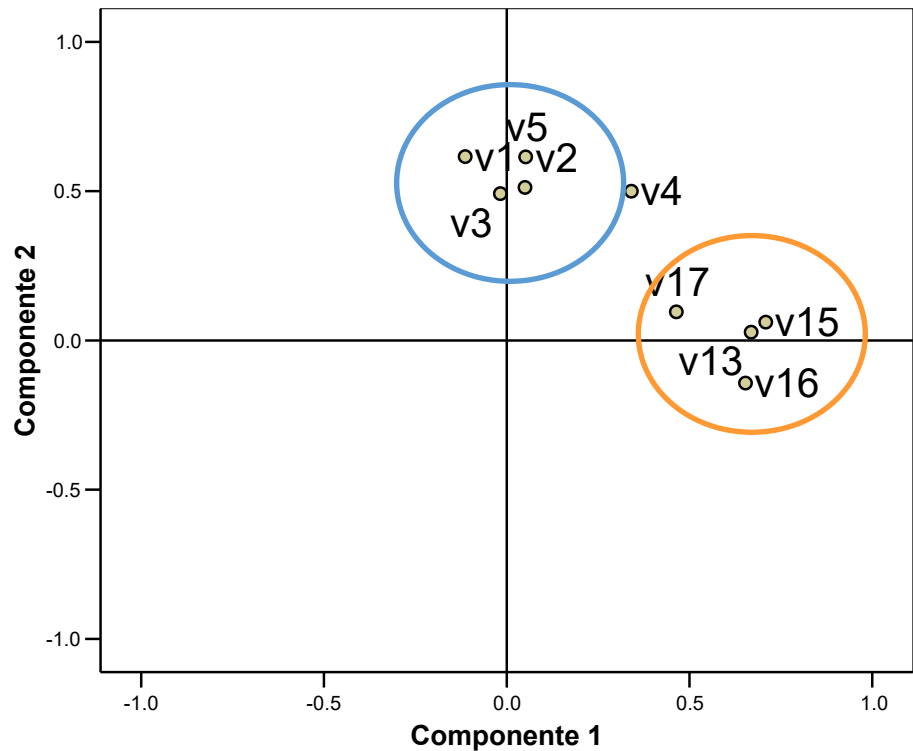
- Quando la soluzione è semplice, useremo gli items che meglio saturano sul fattore per interpretare il suo significato

Grafico componenti ruotato

Matrice dei componenti^a

Items di estroversione

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	-.114	.615
v2 Estroverso	.050	.512
v3 Espansivo	-.017	.491
v4 Divertente	.341	.500
v5 Colorito	.052	.615
v15 Sereno	.709	.061
v16 Sicuro	.654	-.143
v17 Stabile	.464	.096
v13 Diligente	.669	.028



Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Items di stabilità emotiva
 max con normalizzazione di K
 aggiunto i criteri di convergen
 in 3 iterazioni.

Problema

- Il problema è che la maggior parte delle soluzioni fattoriali estratte dall'ACP saranno complesse!

Grafico componenti

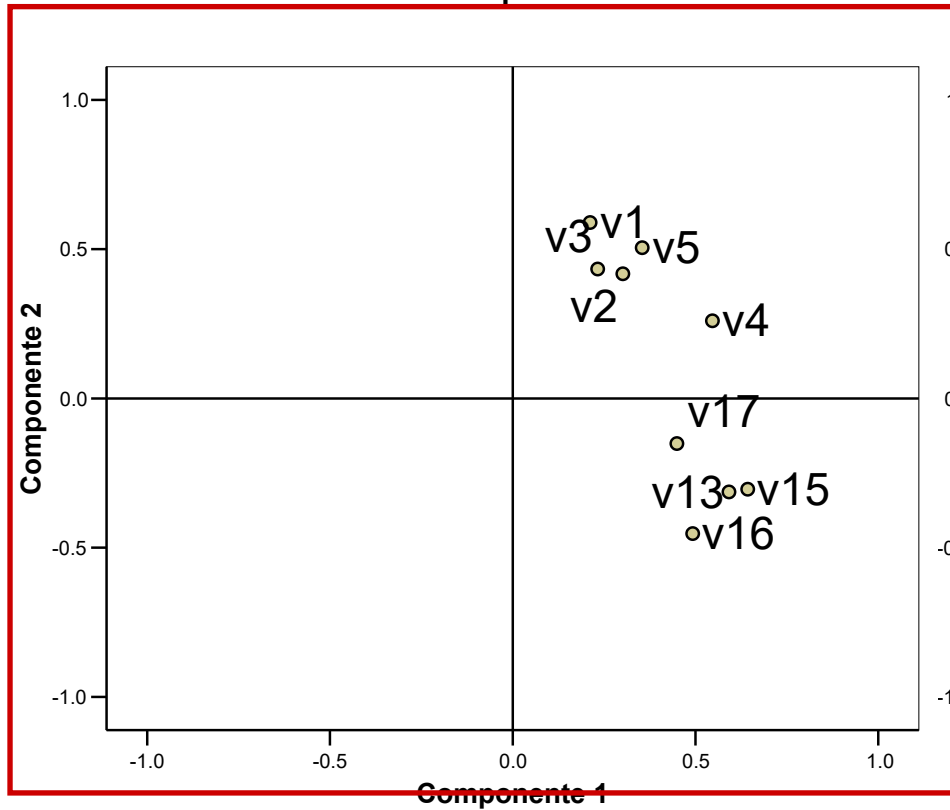
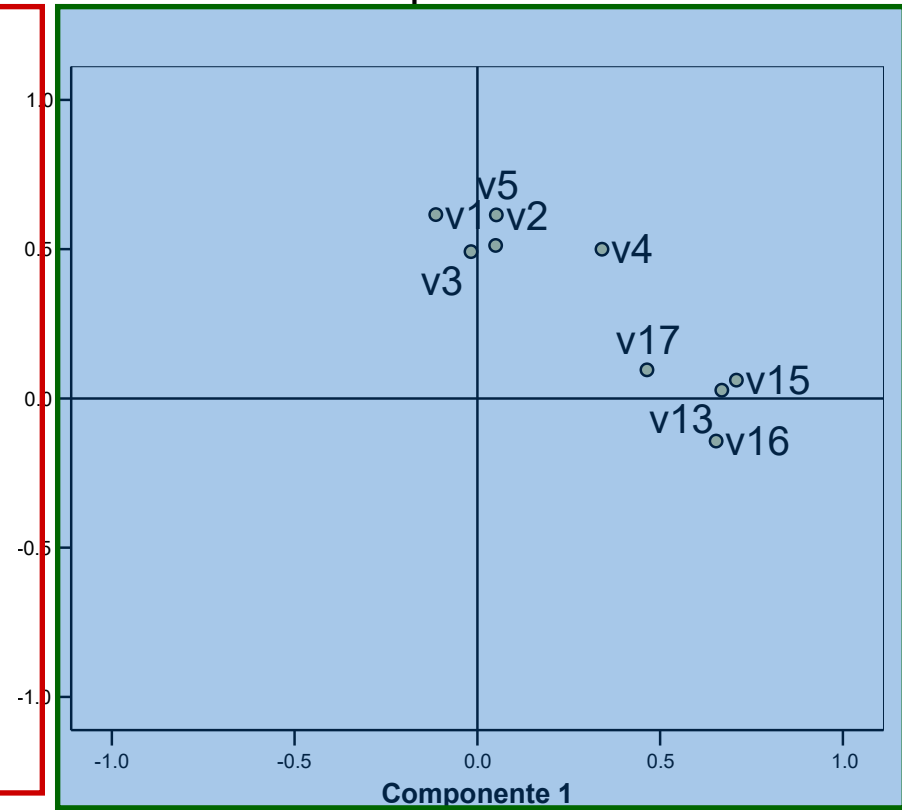
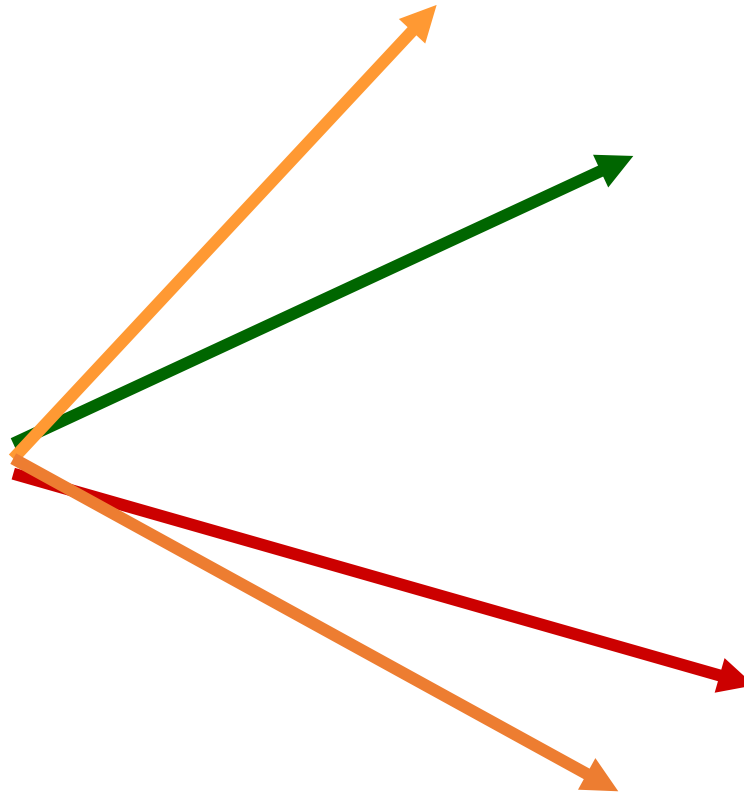


Grafico componenti ruotato



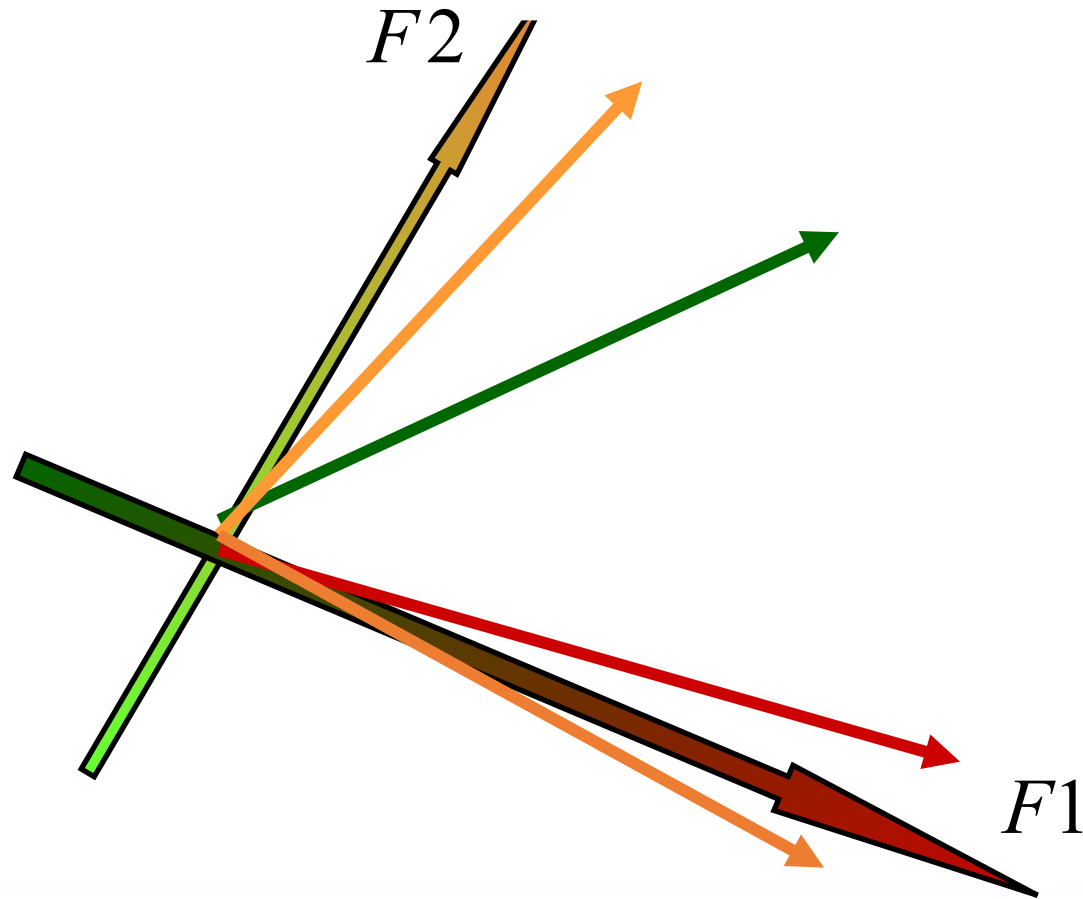
Perché? (I)

- Consideriamo un esempio con queste quattro variabili-vettore



Perché? (I)

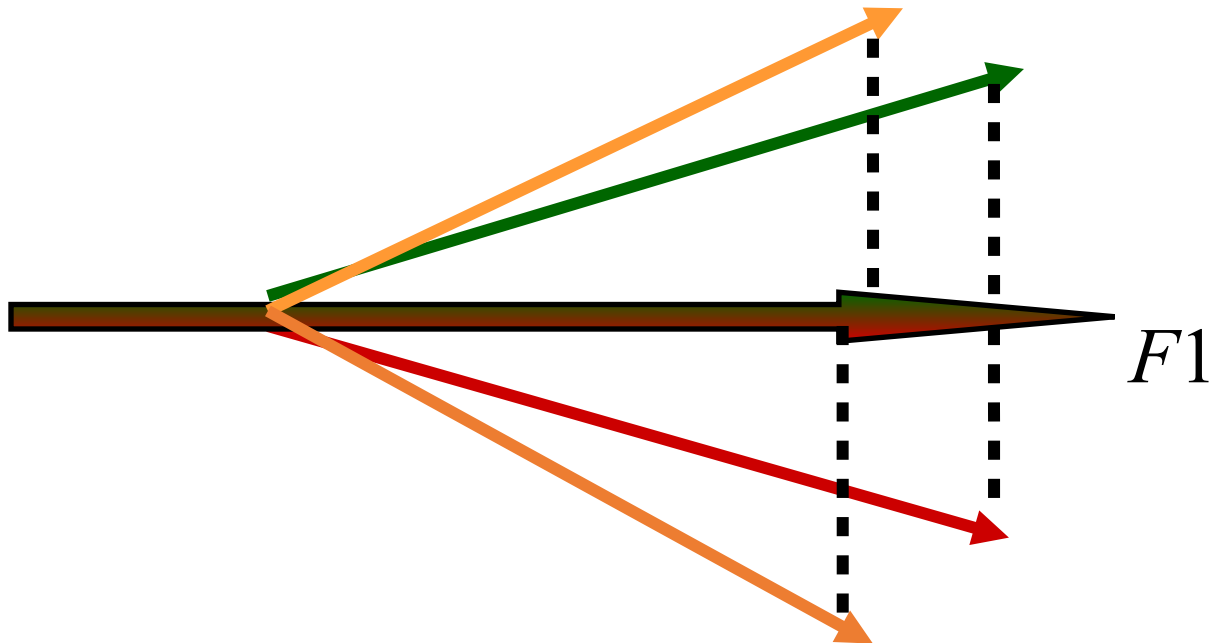
- Se dovessimo estrarre due fattori ortogonali che diano una struttura semplice, probabilmente la soluzione dovrebbe essere qualcosa del genere



Perché? (I)

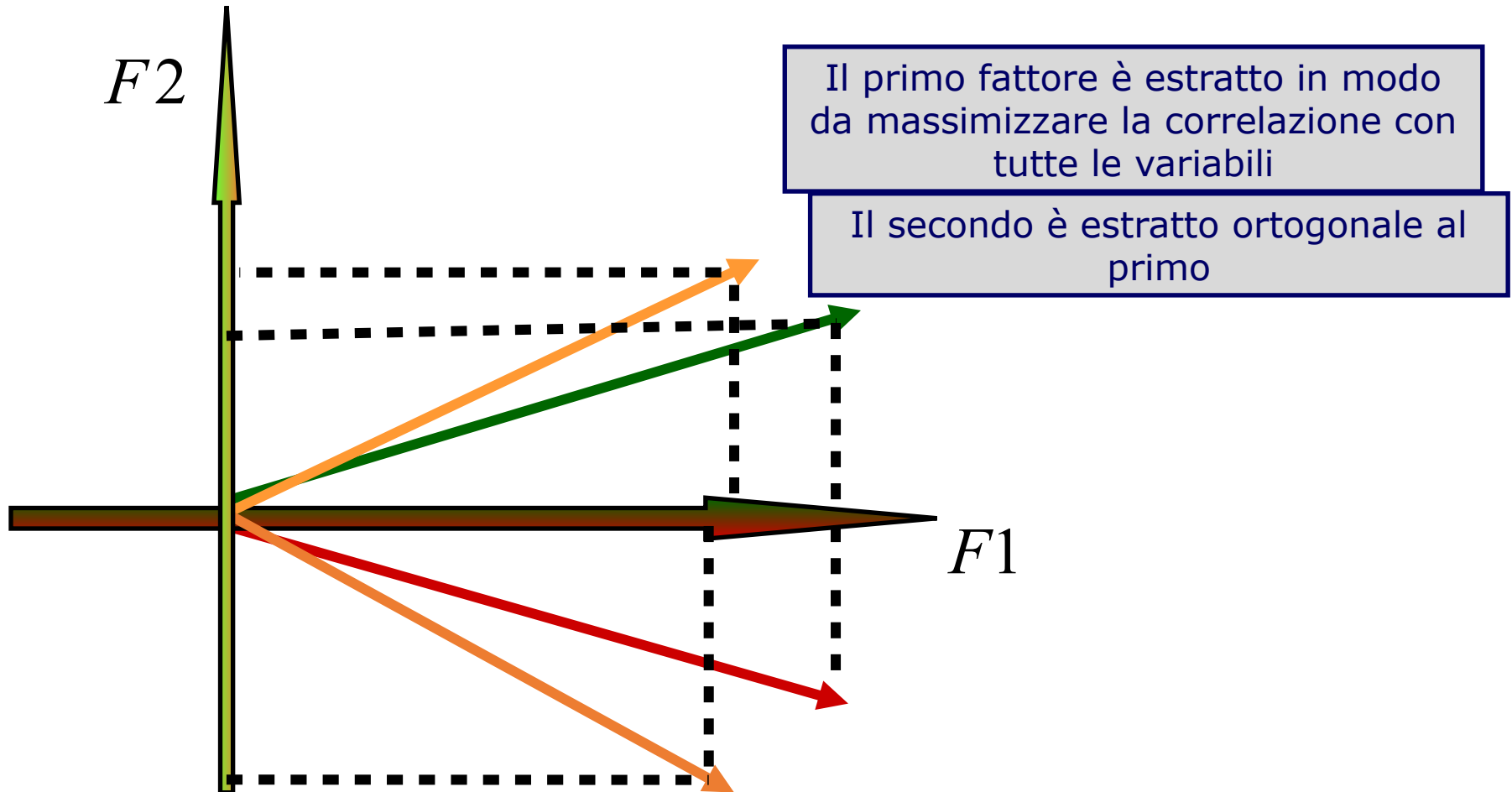
- Ma ricordiamo la logica della determinazione dei fattori:

Il primo fattore è estratto in modo da massimizzare la correlazione con tutte le variabili



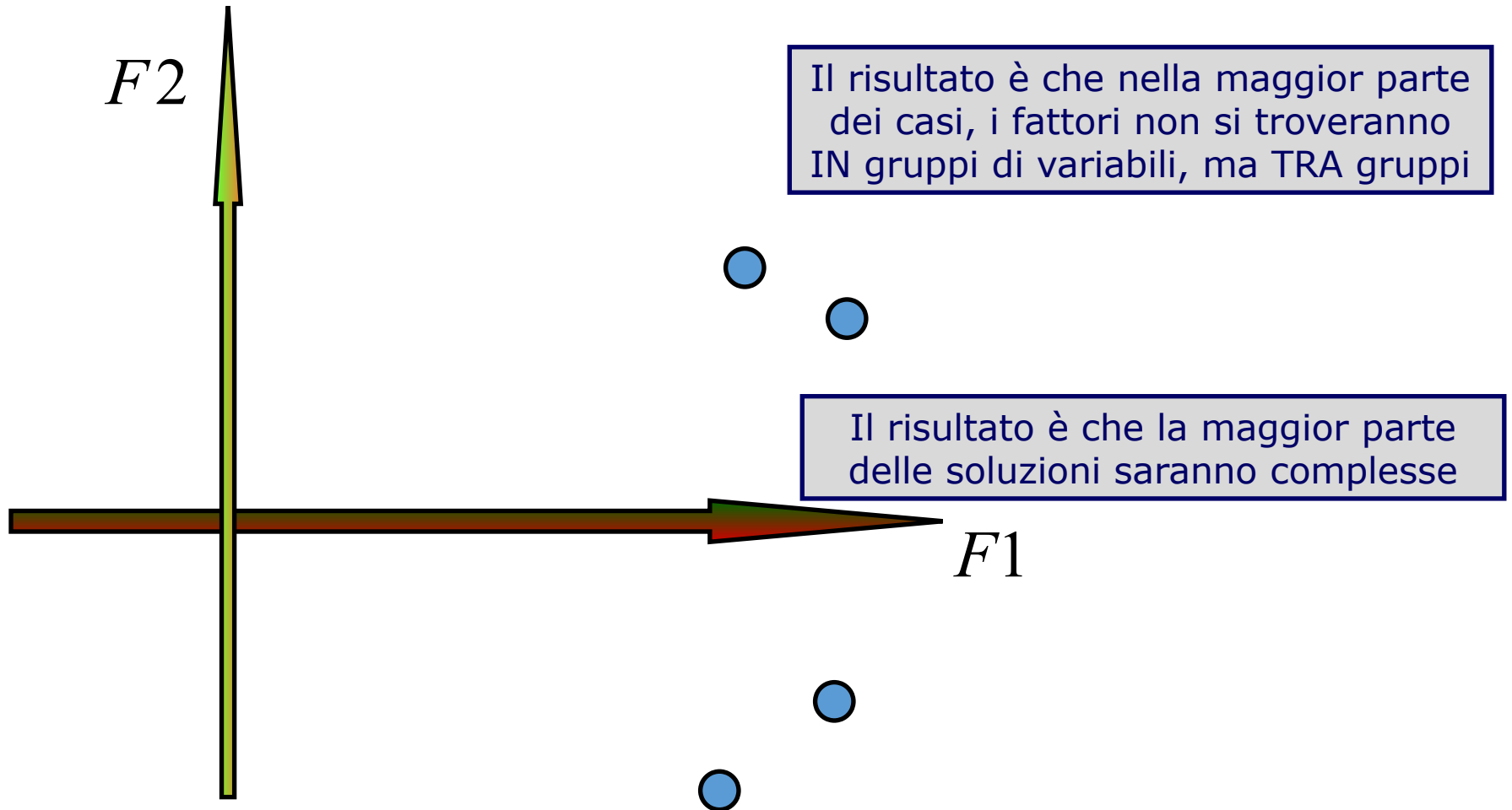
Perché? (I)

- Ma ricordiamo la logica della determinazione dei fattori:



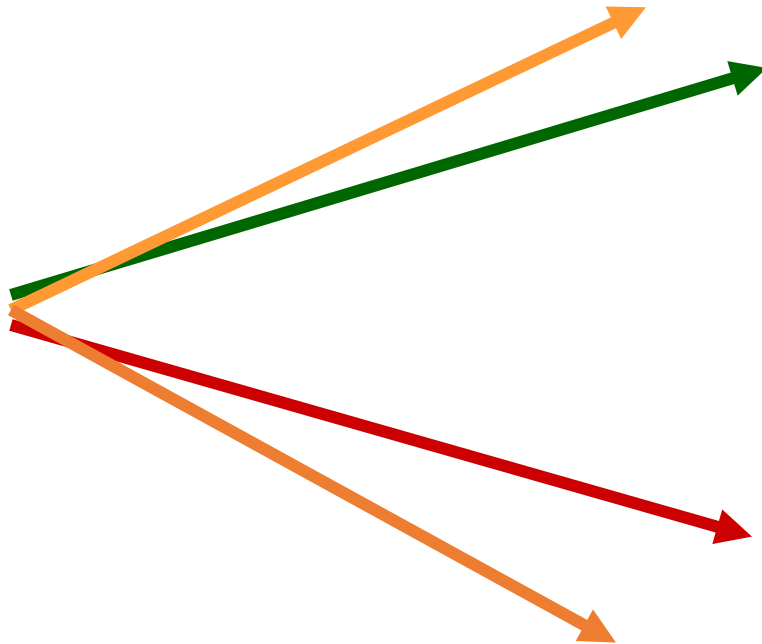
Perché? (I)

- Ma ricordiamo la logica della determinazione dei fattori:



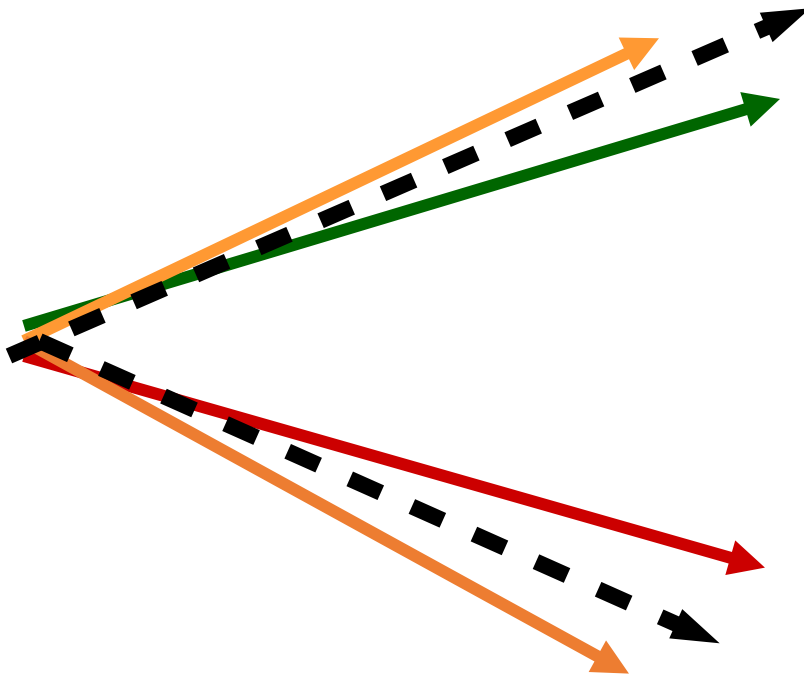
Perché? (II)

- Consideriamo un esempio con queste quattro variabili-vettore



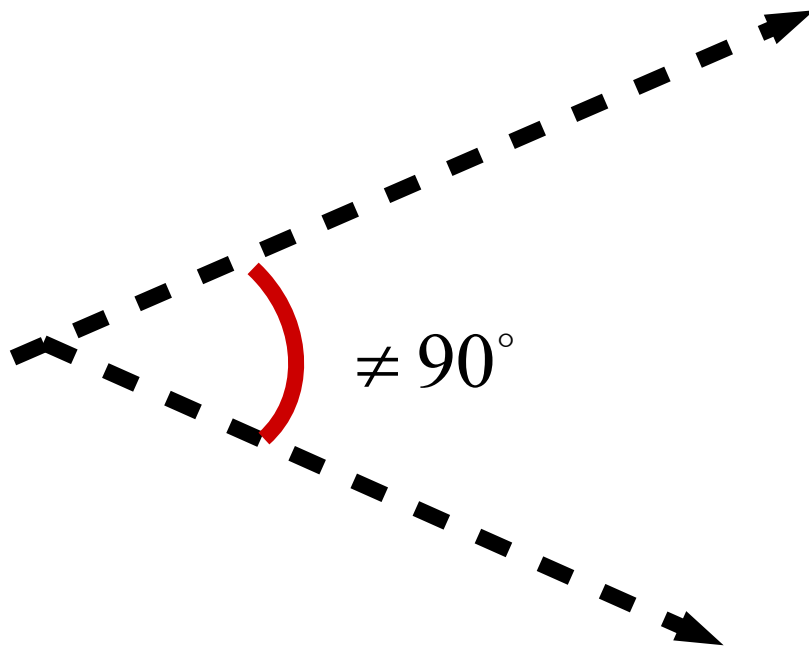
Perché? (II)

- Logicamente le migliori dimensioni dovrebbero essere quelle che passano all'interno dei gruppi di variabili



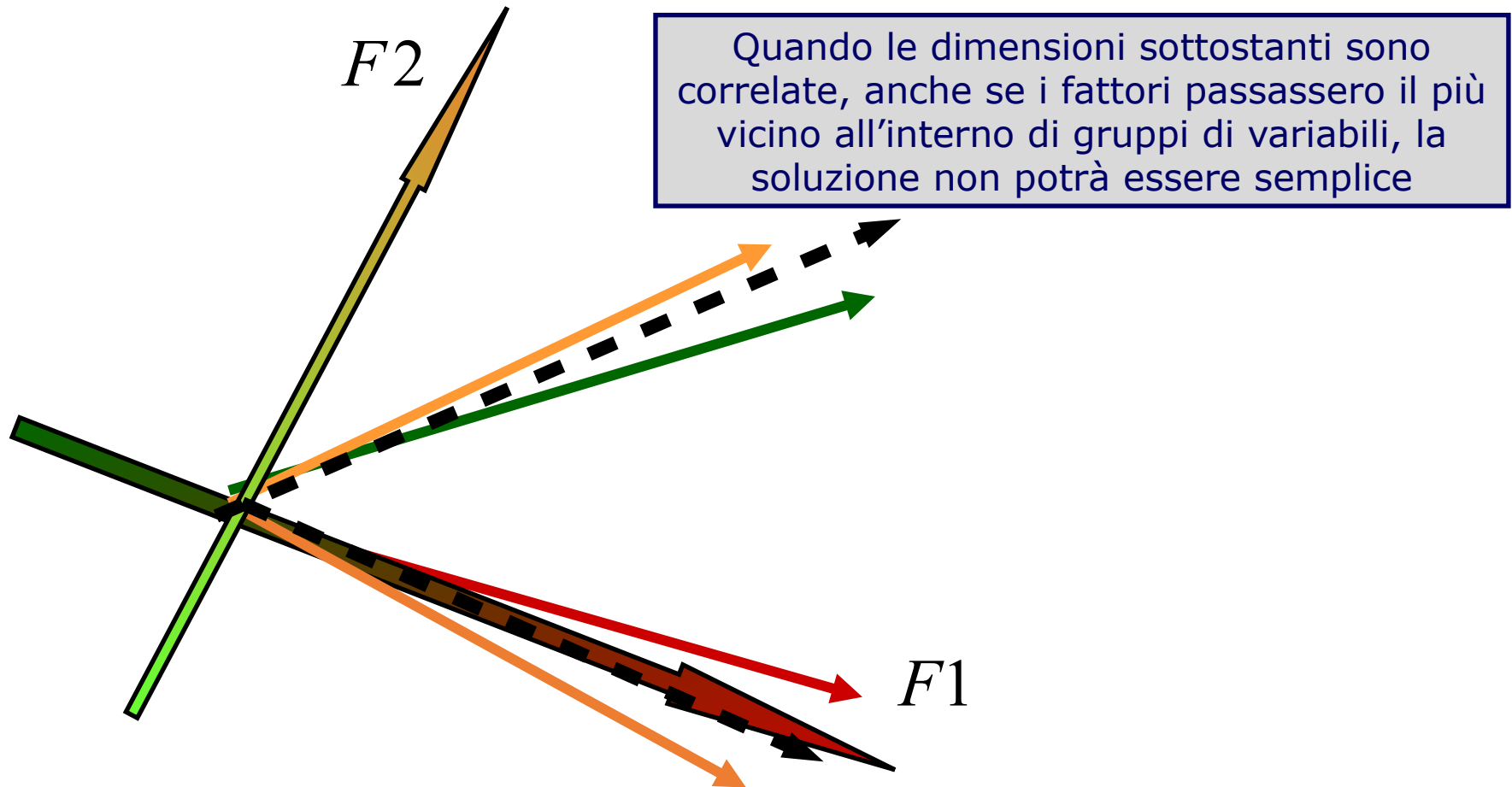
Perché? (II)

- Ma tali dimensioni non sarebbero ortogonali



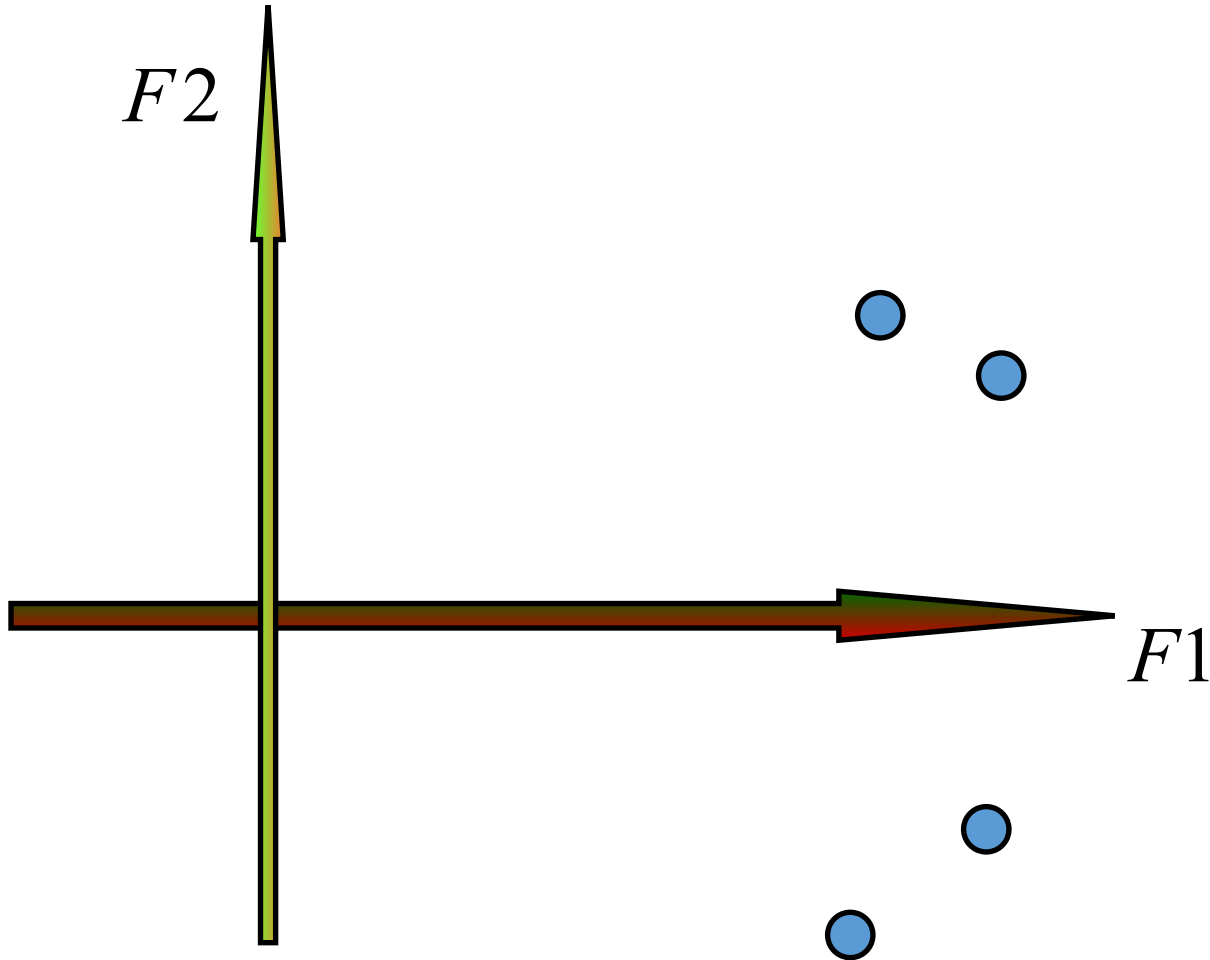
Perché? (II)

- Ricordiamo che l'estrazione dei fattori richiede che essi siano a due a due ortogonali



Soluzione?

- Cosa si può fare per risolvere questo problema?



Soluzioni

- Per ovviare a questi problemi interpretativi, si ricorre ad una rotazione degli assi volta a rendere la soluzione la più semplice possibile, cioè la più interpretabile possibile

- **Rotazioni Ortogonali: VARIMAX**

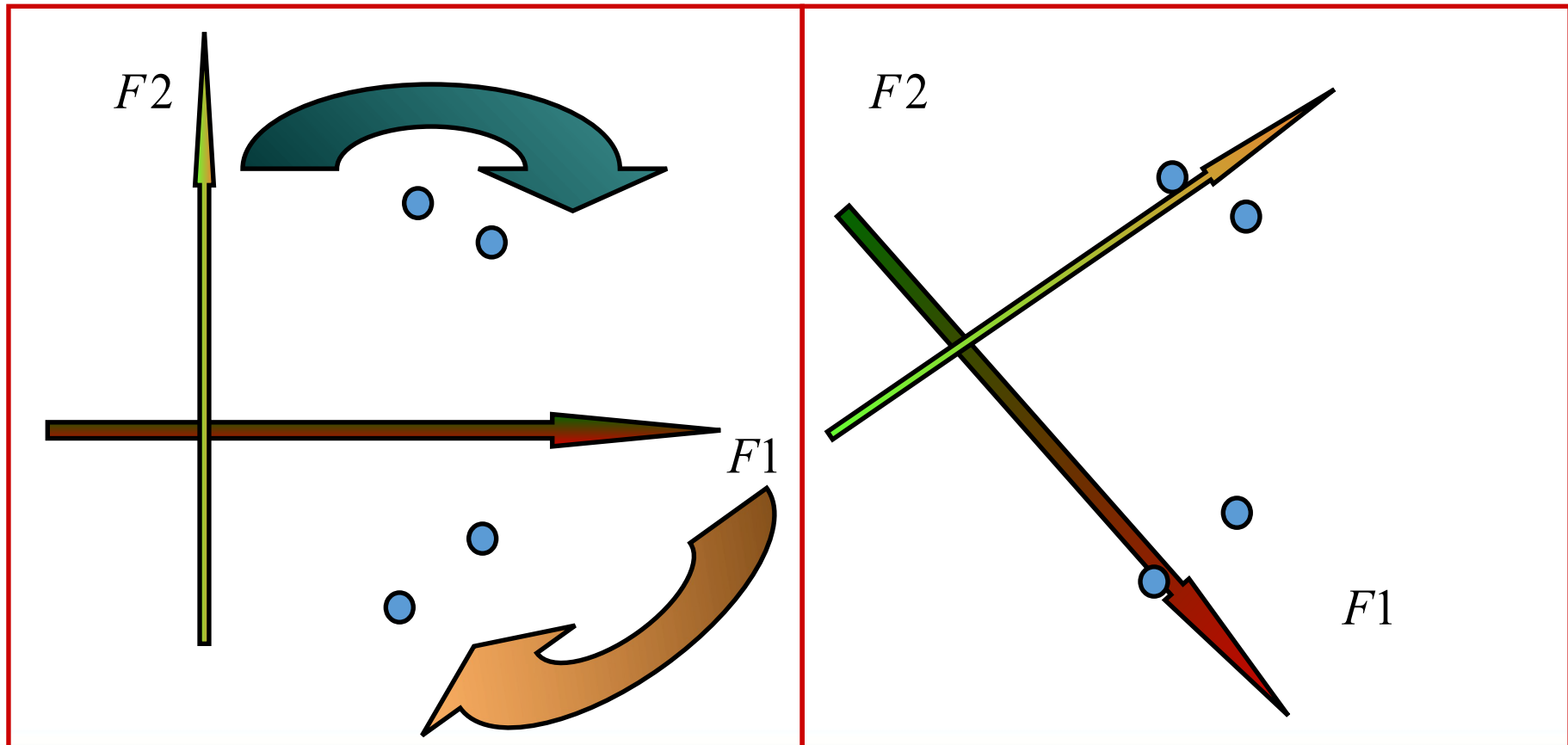
In cui gli assi sono ruotati mantenendo la loro ortogonalità (cioè sono indipendenti)

- **Rotazioni Oblique: OBLIMIN**

In cui gli assi sono ruotati senza mantenere la loro ortogonalità (cioè sono correlati)

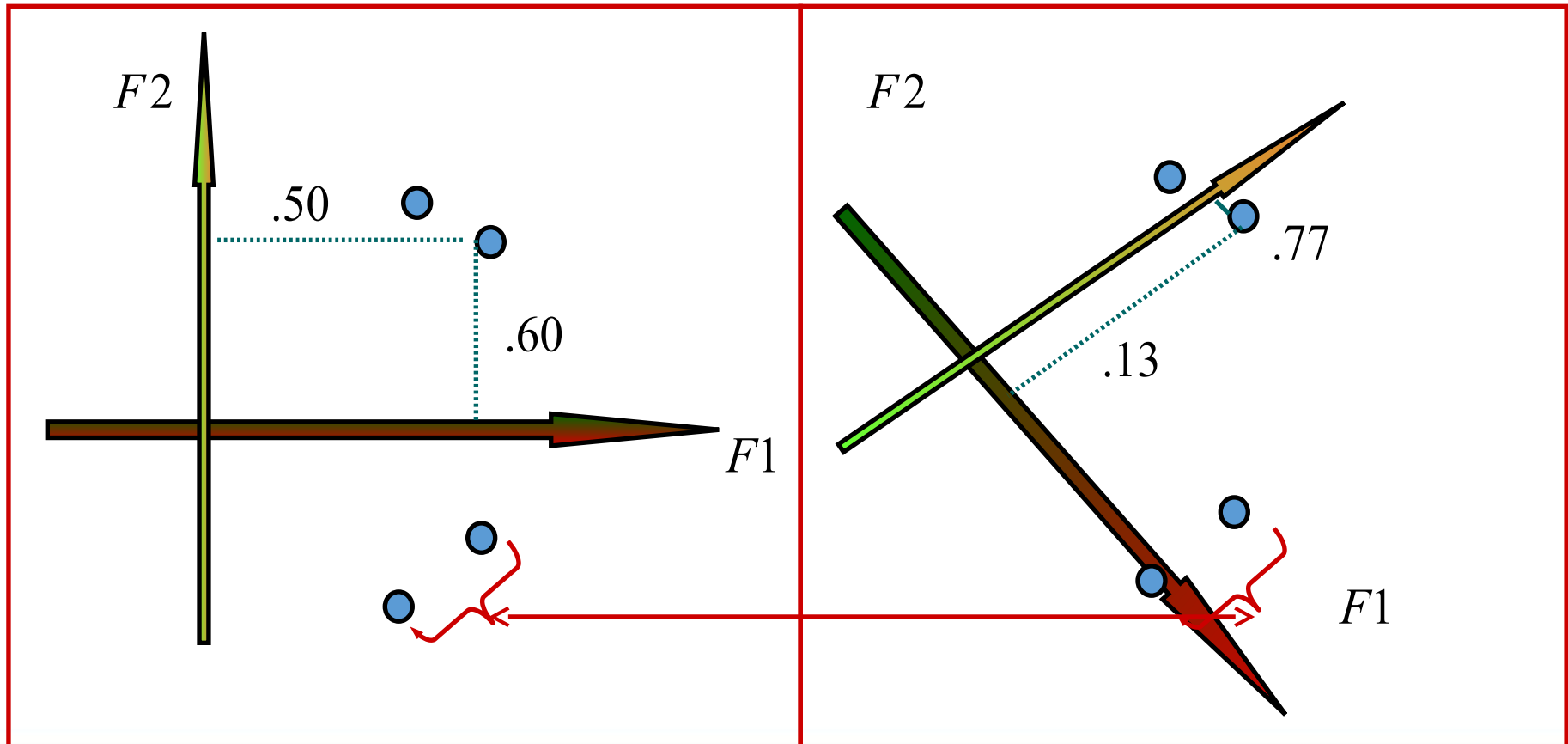
Rotazione ortogonale

- La rotazione ortogonale modifica il posizionamento degli assi al fine di far passare gli assi il più possibile all'interno di gruppi omogenei di variabili



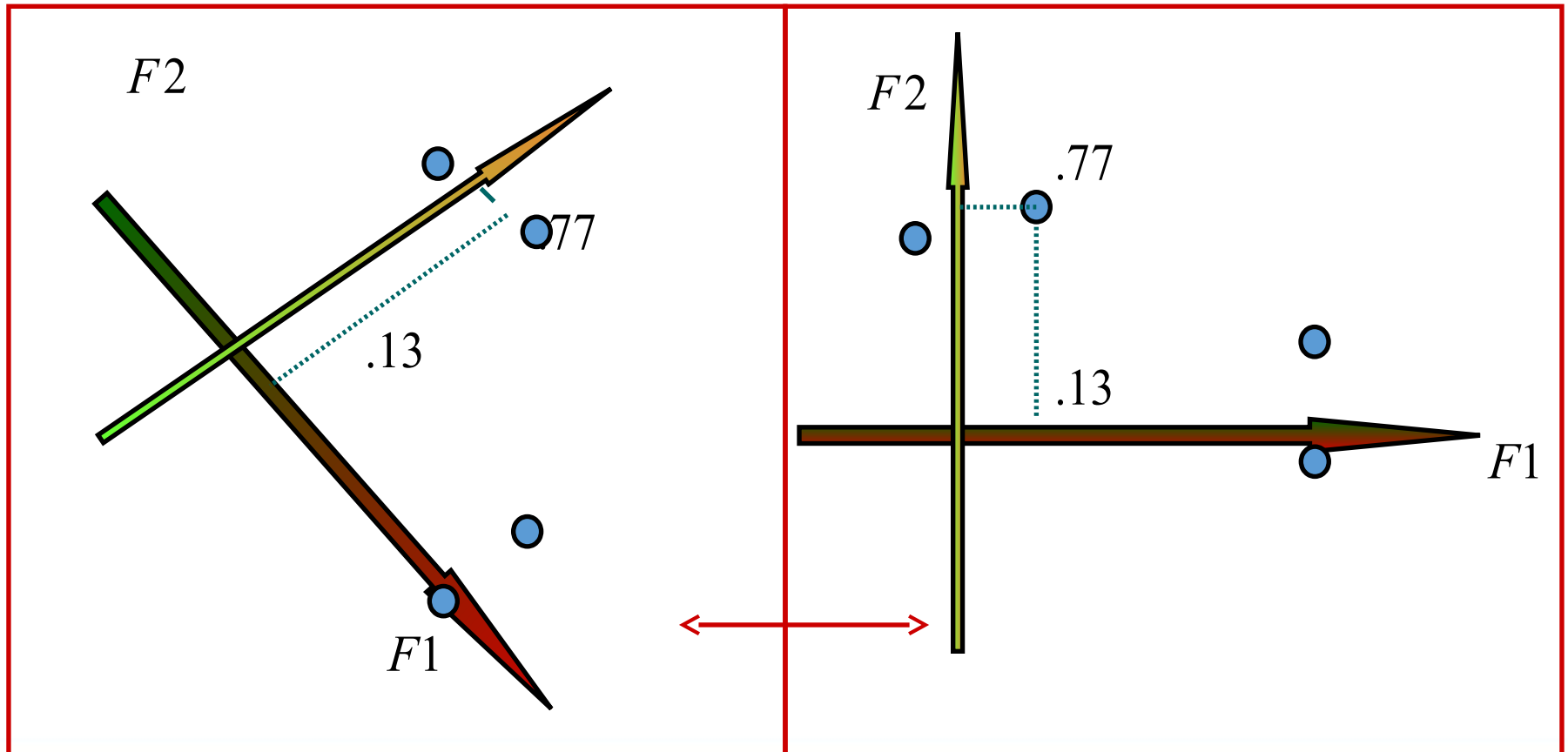
Rotazione ortogonale

- Notiamo che le variabili rimangono fisse nelle posizioni relative, ma cambiano solo le loro proiezioni sui fattori



Rotazione ortogonale

- Per rappresentare meglio una struttura ruotata, si allineano di nuovo i fattori ruotati con gli assi ortogonali



Soluzione ruotata

- La soluzione ruotata è sempre più semplice di quella iniziale, e dunque useremo la ruotata per interpretare i fattori

Grafico componenti

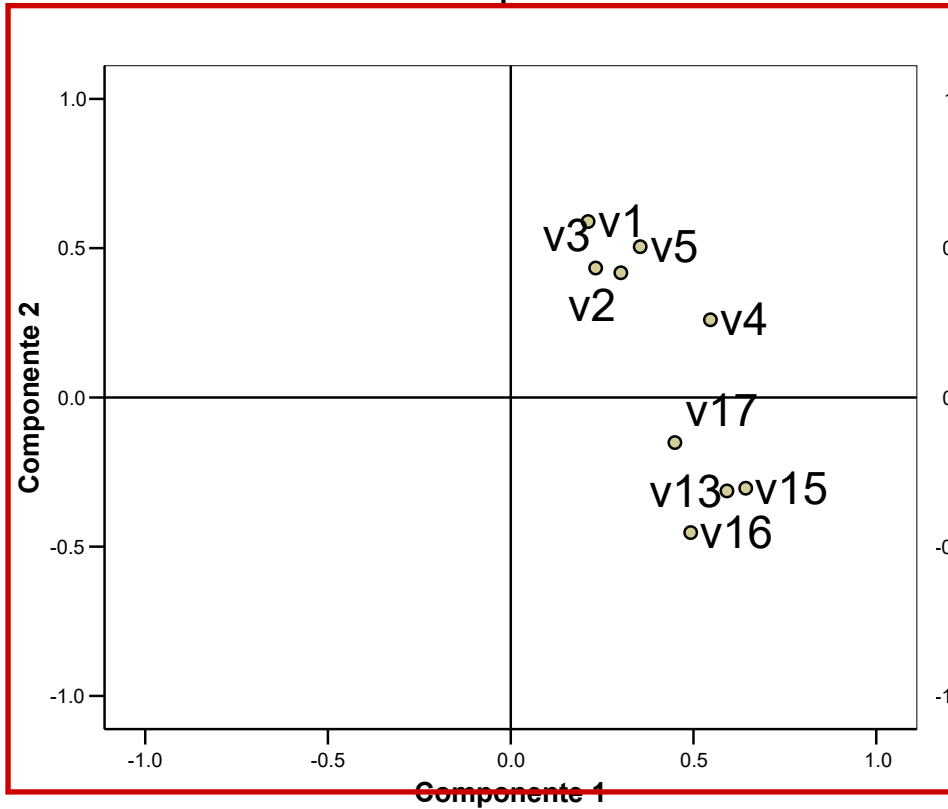
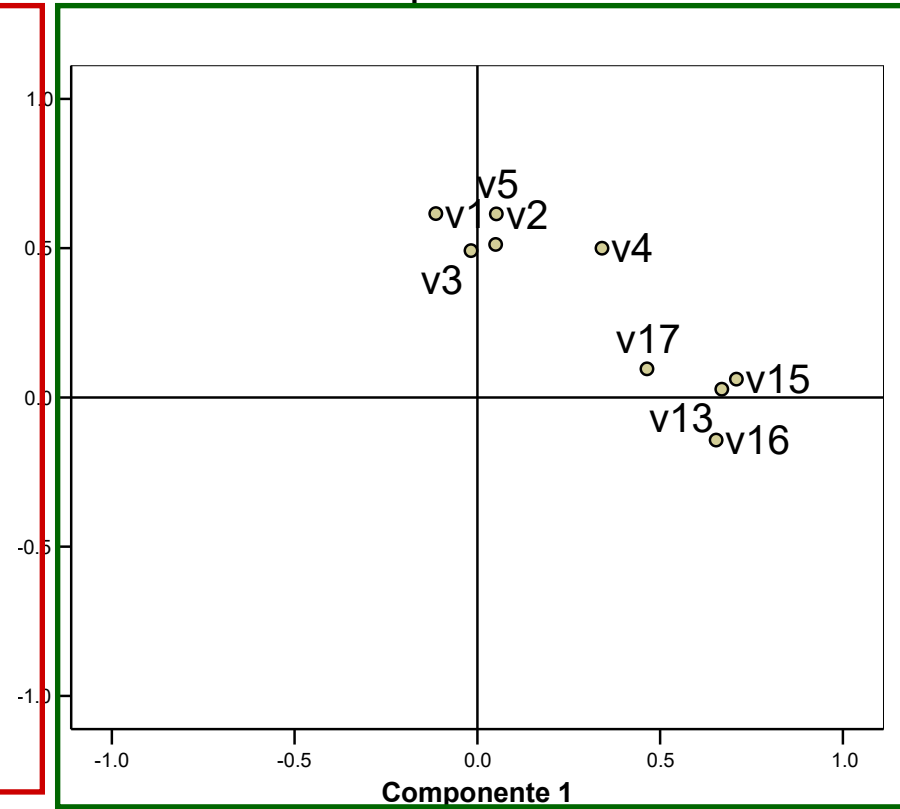


Grafico componenti ruotato



Soluzione ruotata

- La rotazione ortogonale trasforma le saturazioni fattoriali al fine di rendere la soluzione massimamente semplice

Matrice di componenti^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	.212	.589
v2 Estroverso	.301	.417
v3 Espansivo	.233	.433
v4 Divertente	.546	.260
v5 Colorito	.354	.505
v15 Sereno	.643	-.304
v16 Sicuro	.492	-.453
v17 Stabile	.449	-.151
v13 Diligente	.592	-.313

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

a. 2 componenti estratti

Matrice dei componenti^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	-.114	.615
v2 Estroverso	.050	.512
v3 Espansivo	-.017	.491
v4 Divertente	.341	.500
v5 Colorito	.052	.615
v15 Sereno	.709	.061
v16 Sicuro	.654	-.143
v17 Stabile	.464	.096
v13 Diligente	.669	.028

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Metodo rotazione: Varimax con normalizzazione di Kaiser.

a. La rotazione ha raggiunto i criteri di convergenza in 3 iterazioni.

Soluzione ruotata

- La rotazione ortogonale trasforma le saturazioni fattoriali al fine di rendere la soluzione massimamente semplice

Matrice di componenti^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	.212	.589
v2 Estroverso	.301	.417
v3 Espansivo	.233	.433
v4 Divertente	.546	.260
v5 Colorito	.354	.505
v15 Sereno	.643	-.304
v16 Sicuro	.492	-.453
v17 Stabile		
v13 Diligente		

Matrice dei componenti^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	-.114	.615
v2 Estroverso	.050	.512
v3 Espansivo	-.017	.491
v4 Divertente	.341	.500
v5 Colorito	.052	.615
v15 Sereno	.709	.061
v16 Sicuro	.654	-.143
		.096
		.028

Notiamo che le saturazioni sono ora più alte* nel fattore più vicino, e più basse nell'altro fattore

Metodo estrazione: anal

a. 2 componenti estratti

Metodo rotazione: varimax con normalizzazione di Kaiser.

a. La rotazione ha raggiunto i criteri di convergenza in 3 iterazioni.

* Alte e basse si intende sempre in valore assoluto

Cosa altro cambia?

- Se cambiano le saturazioni, cambieranno anche la loro somma dei quadrati

Matrice di componenti^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	.212	.589
v2 Estroverso	.301	.417
v3 Espansivo	.233	.433
v4 Divertente	.546	.260
v5 Colorito	.354	.505
v15 Sereno	.643	-.304
v16 Sicuro	.492	-.453
v17 Stabile	.449	-.151
v13 Diligente	.592	-.313

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Somma dei quadrati estratti **1.82** **1.44**

Matrice dei componenti^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	-.114	.615
v2 Estroverso	.050	.512
v3 Espansivo	-.017	.491
v4 Divertente	.341	.500
v5 Colorito	.052	.615
v15 Sereno	.709	.061
v16 Sicuro	.654	-.143
v17 Stabile	.464	.096
v13 Diligente	.669	.028

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Metodo rotazione: Varimax con normalizzazione di Kaiser.

- a. La rotazione ha raggiunto i criteri di convergenza in 3 iterazioni.

Cosa altro cambia?

- Le varianze dei fattori cambieranno in quanto la rotazione rialloca la varianza tra i fattori
- In generale, i fattori ruotati risulteranno più omogenei in termini di varianza spiegata

	1	2
v1 Scherzoso	.212	.589
v2 Estroverso	.301	.417
v3 Espansivo	.233	.433
v4 Divertente	.546	.260
v5 Colorito	.354	.505
v15 Sereno	.643	-.304
v16 Sicuro	.492	-.453
v17 Stabile	.449	-.151
v13 Diligente	.592	-.313

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Somma dei quadrati estratti **1.82** **1.44**

	1	2
v1 Scherzoso	-.114	.615
v2 Estroverso	.050	.512
v3 Espansivo	-.017	.491
v4 Divertente	.341	.500
v5 Colorito	.052	.615
v15 Sereno	.709	.061
v16 Sicuro	.654	-.143
v17 Stabile	.464	.096
v13 Diligente	.669	.028

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

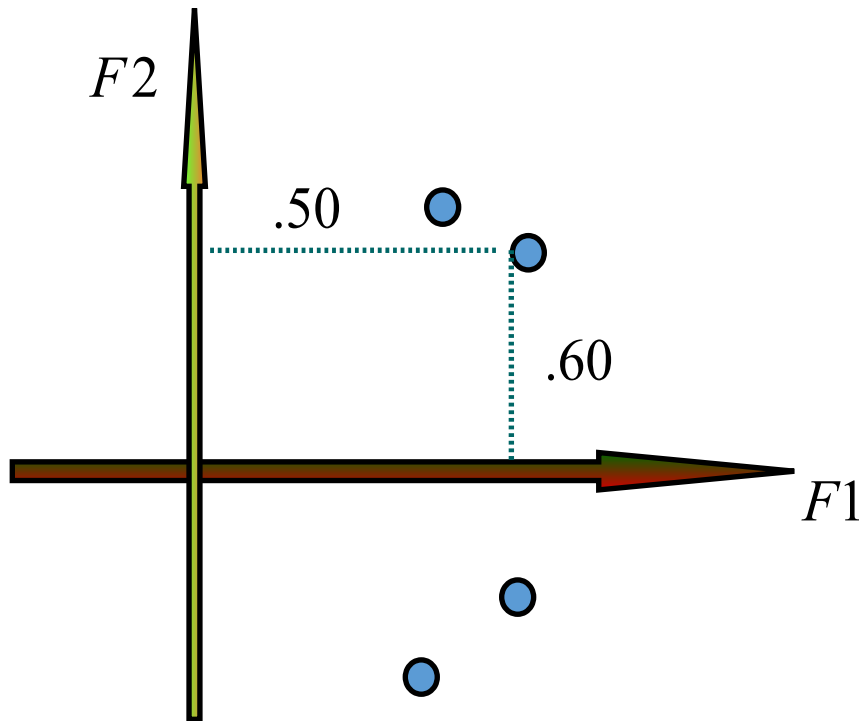
Metodo rotazione: Varimax con normalizzazione di Kaiser.

- a. La rotazione ha raggiunto i criteri di convergenza in 3 iterazioni.

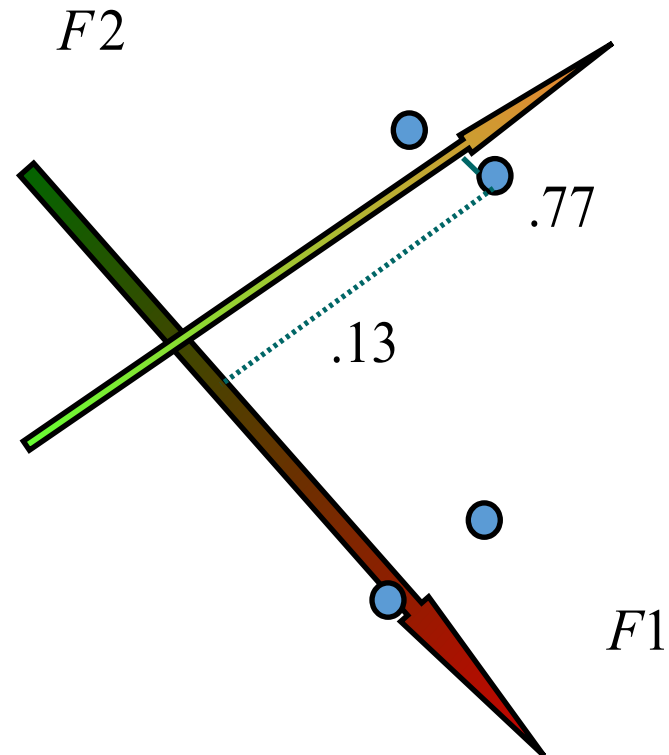
Perché?

- ricordiamo la logica dell'estrazione dei fattori iniziali

F1 spiega il massimo, F2 quella che rimane



Sia F1 che F2 sono posizionati ognuno per spiegare il massimo possibile



Cosa rimane costante?

- Ovviamente, la varianza spiegata in totale non può essere aumentata da una rotazione, altrimenti roteremmo i fattori per spiegare tutto

Matrice di componenti^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	.212	.589
v2 Estroverso	.301	.417
v3 Espansivo	.233	.433
v4 Divertente	.546	.260
v5 Colorito	.354	.505
v15 Sereno	.643	-.304
v16 Sicuro	.492	-.453
v17 Stabile	.449	-.151
v13 Diligente	.592	-.313

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Somma dei quadrati $1.82 + 1.44 = 3.26$

Matrice dei componenti^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	-.114	.615
v2 Estroverso	.050	.512
v3 Espansivo	-.017	.491
v4 Divertente	.341	.500
v5 Colorito	.052	.615
v15 Sereno	.709	.061
v16 Sicuro	.654	-.143
v17 Stabile	.464	.096
v13 Diligente	.669	.028

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Metodo rotazione: Varimax con normalizzazione di Kaiser.

- a. La rotazione ha raggiunto i criteri di convergenza in 3 iterazioni.

Cosa rimane costante?

- La comunalità (quanto tutti i fattori estratti spiegano per ogni singolo item) rimane invariata

Matrice di component^a

	Somma dei quadrati Componente		
	1	2	
v1 Scherzoso	.212	.589	= .391
v2 Estroverso	.301	.417	
v3 Espansivo	.233	.433	
v4 Divertente	.546	.260	
v5 Colorito	.354	.505	
v15 Sereno	.643	-.304	
v16 Sicuro	.492	-.453	
v17 Stabile	.449	-.151	
v13 Diligente	.592	-.313	

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

a. 2 componenti estratti

Matrice dei component^a

	Componente		
	1	2	
v1 Scherzoso	-.114	.615	= .391
v2 Estroverso	.050	.512	
v3 Espansivo	-.017	.491	
v4 Divertente	.341	.500	
v5 Colorito	.052	.615	
v15 Sereno	.709	.061	
v16 Sicuro	.654	-.143	
v17 Stabile	.464	.096	
v13 Diligente	.669	.028	

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Metodo rotazione: Varimax con normalizzazione di Kaiser.

a. La rotazione ha raggiunto i criteri di convergenza in 3 iterazioni.

Rotazione ortogonale

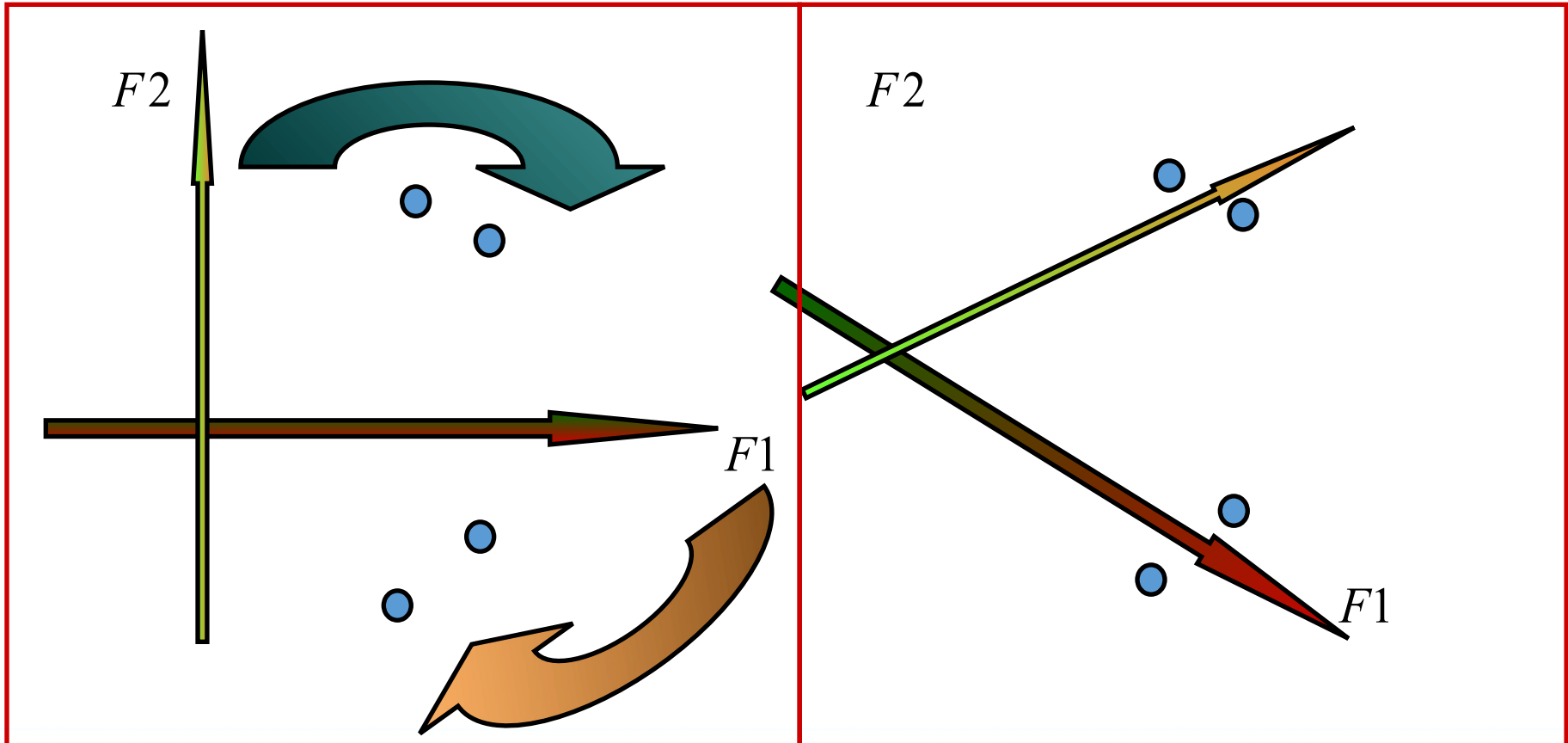
- Al fine di ottenere una soluzione semplice si può ruotare la soluzione
- La rotazione ortogonale mantiene l'ortogonalità degli assi (rotazione rigida)
- La rotazione ortogonale modifica le saturazioni al fine di renderle il più semplici possibili
- Le varianze dei fattori risulteranno cambiate dopo la rotazione
- La varianza totale spiegata non risulta cambiata
- La comunaltà degli items non risulta cambiata

Rotazione ortogonale

- Vi sono vari tipi di rotazione (algoritmi)
- La più usata è la rotazione VARIMAX
- Ruota gli assi massimizzando la varianza delle saturazioni dei fattori
- Tale varianza è massima quanto le saturazioni sono tutte 0, 1, e -1
- Dunque la soluzione è massimamente semplice

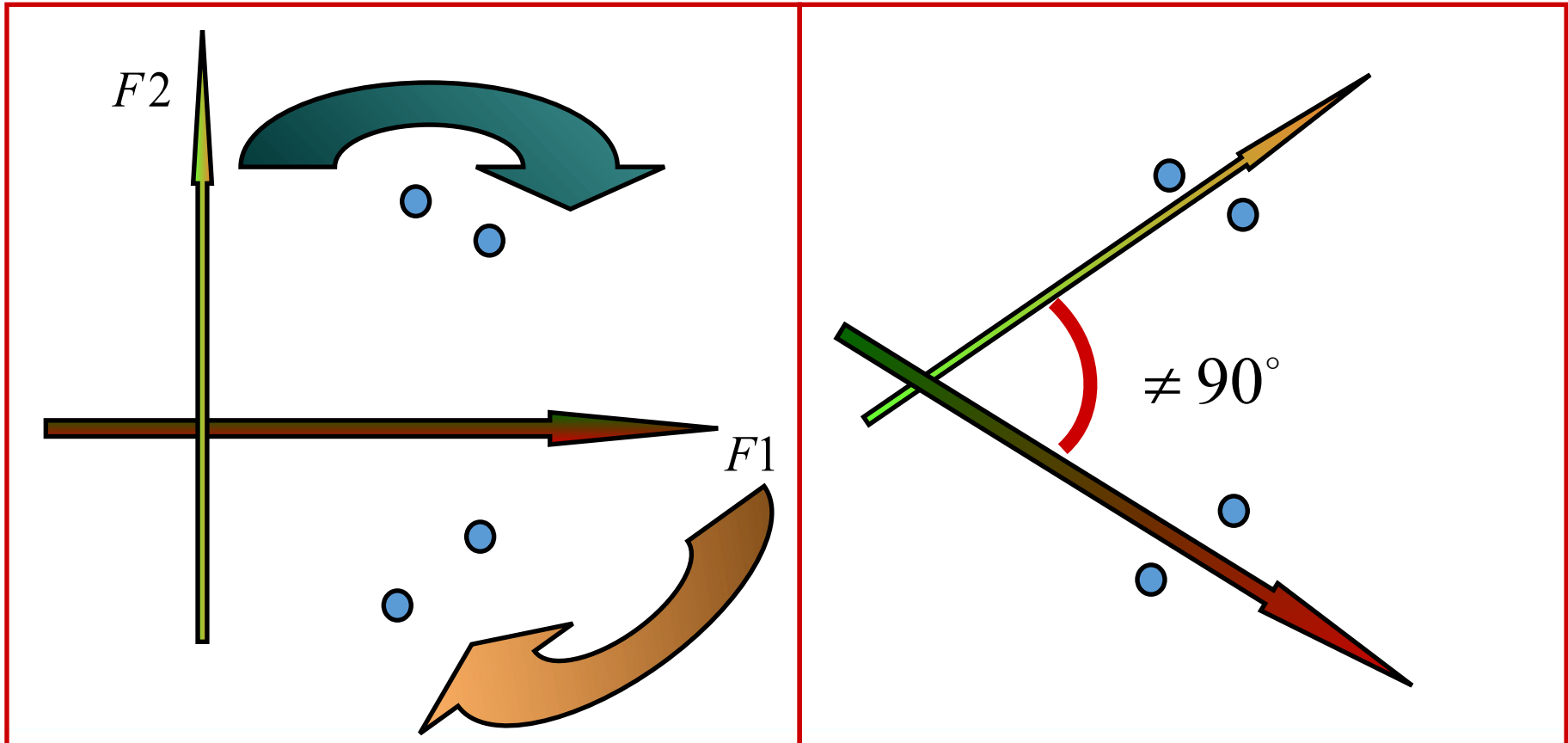
Rotazione Obliqua

- La rotazione obliqua procede come la rotazione ortogonale, ma ruota un asse alla volta senza mantenerli ortogonali



Rotazione Obliqua

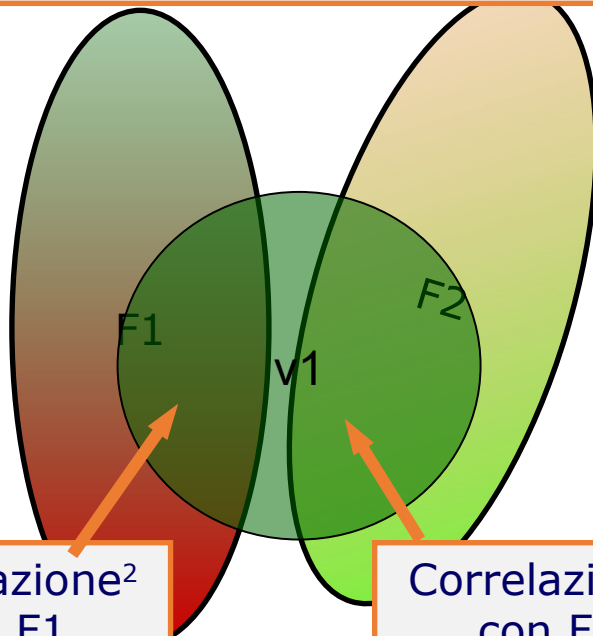
- La rotazione Obliqua procede come la rotazione ortogonale, ma ruota un asse alla volta senza mantenerli ortogonali



Elementi della soluzione obliqua

- Le relazioni tra items e fattori non possono essere espresse semplicemente dalle saturazioni fattoriali (correlazioni item-fattore) in quanto i fattori sono correlati

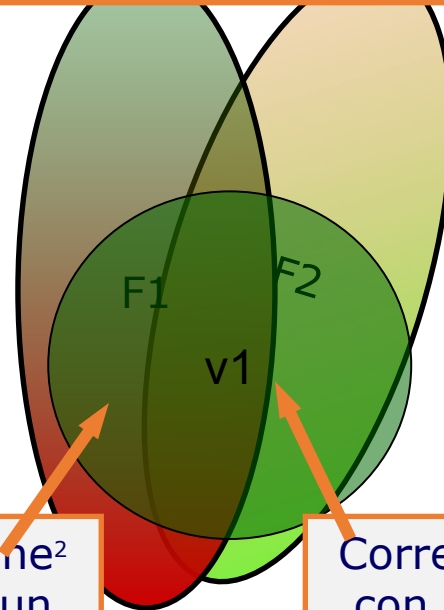
Soluzione Ortogonale



Correlazione²
con F1

Correlazione²
con F2

Soluzione Obliqua



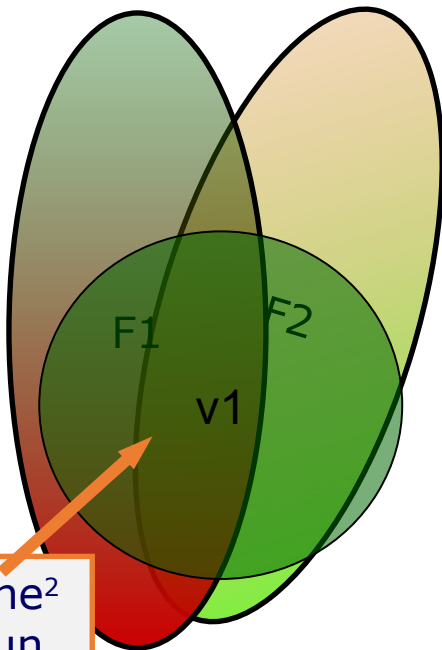
Correlazione²
con F1 e un
pò di F2

Correlazione²
con F2 e un
pò di F1

Matrice di struttura

- Le relazioni tra items e fattori sono decomposte in **due** matrici di pesi

Matrice di struttura
Correlazioni item-fattore
semplice



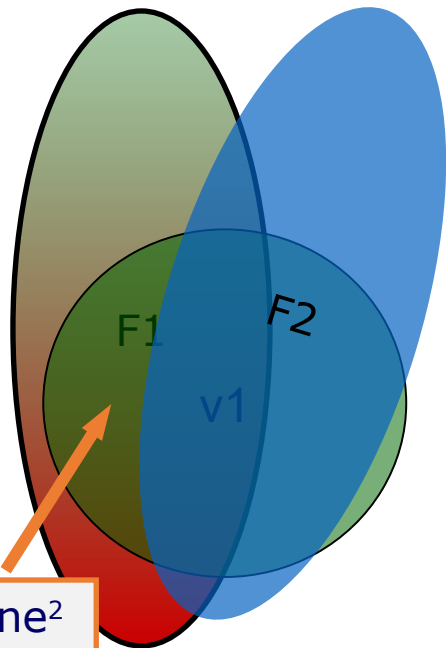
Correlazione²
con F1 e un
po di F2

I valori indicano la correlazione
tra item e fattore, inclusa quella
parte condivisa con altri fattori

Matrice dei modelli

- Le relazioni tra items e fattori sono decomposte in **due** matrici di pesi

Matrice dei modelli
Correlazioni parziali item-fattore



Correlazione²
pura con F1

I valori indicano la correlazione tra item e fattore, parzializzando ogni altra relazione con altri fattori

La matrice dei modelli indica il contributo unico della variabile al fattore, e dunque useremo tali valori per interpretare i fattori

Soluzione ruotata obliquamente

Correlazioni parziali

Matrice dei modelli^a

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	-.144	.623
v2 Estroverso	.025	.512
v3 Espansivo	-.041	.494
v4 Divertente	.318	.485
v5 Colorito	.022	.614
v15 Sereno	.708	.029
v16 Sicuro	.663	-.174
v17 Stabile	.461	.074
v13 Diligente	.670	-.003

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Metodo rotazione: Oblimin con normalizzazione di Kaiser

- a. La rotazione ha raggiunto i criteri di convergenza in 5 iterazioni.

Correlazioni semplici

Matrice di struttura

	Componente	
	1	2
v1 Scherzoso	-.085	.609
v2 Estroverso	.074	.514
v3 Espansivo	.005	.490
v4 Divertente	.364	.515
v5 Colorito	.080	.616
v15 Sereno	.711	.095
v16 Sicuro	.646	-.111
v17 Stabile	.468	.118
v13 Diligente	.670	.060

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Metodo rotazione: Oblimin con normalizzazione di Kaiser.

La matrice dei modelli indica il contributo unico della variabile al fattore, e dunque useremo tali valori per interpretare i fattori

Soluzione ruotata obliquamente

La soluzione ruotata ci fornisce anche la correlazione tra i fattori

Matrice di correlazione di componenti

Componente	1	2
1	1.000	.094
2	.094	1.000

Metodo estrazione: analisi componenti principali.

Metodo rotazione: Oblimin con normalizzazione di Kaiser.

Quando questa correlazione è bassa la soluzione obliqua non conviene

Correlazione bassa: $<.20$ (rotazione ortogonale)

Correlazione media ($>.20$ ma $<.30$) (forse rotazione obliqua, dipende da quale è più interpretabile)

Correlazione alta: $>.30$ (rotazione obliqua)

Soluzione ruotata obliquamente (II)

Component Correlation Matrix

Component	1	2
1	1,000	,317
2	,317	1,000

Matrice dei modelli^a

	Component	
	1	2
modesto	,419	,208
socievole	-,189	,761
onesto	,754	,079
generoso	,268	,615
altruistico	,261	,585
leale	,794	,020
ospitale	-,007	,781
fedele	,798	-,164

Matrice di struttura

	Component	
	1	2
modesto	,485	,341
socievole	,052	,701
onesto	,779	,319
generoso	,463	,700
altruistico	,446	,668
leale	,800	,272
ospitale	,240	,778
fedele	,746	,090

La matrice dei modelli è più «semplice» fattorialmente

Metodi di rotazione obliqua

- Il più usato è il metodo OBLIMIN
- Il metodo OBLIMIN varia in funzione del parametro delta (δ). Il metodo usato da SPSS di default è con $\delta=0$, che corrisponde ad una rotazione quartimin diretta.
- Un'altra rotazione obliqua è la PROMAX (meno usata, ma molto valida)
- Tutte le rotazioni (sia oblique che ortogonali) mirano a riprodurre il più possibile la struttura semplice, ma differiscono sul cosa si intende per semplicità (**dati** vs. **concettuale**)

In pratica...

1. Se decidete di estrarre 2 o più fattori, dovete ruotare la soluzione fattoriale
2. Ruotate prima con la Oblimin (o Promax) e vedete le correlazioni tra i fattori
3. Se tutte le correlazioni sono basse (ad es. $<.20$), rifate l'analisi fattoriale con rotazione Varimax
4. Se sono alte, considerate la Oblimin (per interpretare le saturazioni fattoriali, vedete la matrice dei modelli)

La rotazione

- Serve a rendere la soluzione più semplice ed interpretabile
- Rotazione ortogonale (varimax) vs Rotazione obliqua (oblimin)
- In terpretiamo le saturazioni ruotate: matrice delle componenti (varimax) o dei modelli (oblimin)
- Alcuni studi possono usare rotazioni teoriche con forme particolari (procustea)

Fine

