I^ Test accesso Clamses I anno Microeconomia

Esercizio consumatore in forma generica.

Supponiamo che Tizia/o tragga utilità dal consumo di *X* e *Y* secondo una funzione di utilità *U(X, Y)* avente le usuali proprietà. Supponiamo anche che la spesa totale possibile *R* sia data, e che Tizia/o non possa spendere né di più né di meno. Il vincolo di bilancio sarà, dati i 2 prezzi,

$$R = p_X X + p_Y Y$$

Tizia/o vuole max l'utilità dato il vincolo e, prima di uscire di casa per andare al mercato, imposta nella sua testa la funzione lagrangiana

$$\Lambda(x, z, \lambda) = U(X, Y) + \lambda\left[R - p_X X - p_Y Y\right].$$

Le domande che seguono dovrebbero descrivere il processo mentale che governa gli acquisti che gli economisti (non tutti, sia chiaro) attribuiscono a Tizia/o.

D1. Come mai la massimizzazione della funzione **non vincolata** $\Lambda(x, z, \lambda)$ risolve il problema della ricerca di un massimo **vincolato** di Tizia/o? Chi e come è riuscito a trasformare un problema di massimo vincolato in un problema di massimo libero?

D2. Ricavare le condizioni di stazionarietà per le **3** incognite (nel gergo degli economisti: condizioni del primo ordine) e da queste le funzioni X*(**p**, R) e Y*(**p**, R):

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = R - p_X X - p_Y Y = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X} - \lambda p_X \qquad = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial Y} - \lambda p_Y \qquad = 0$$

Dalle condizioni del primo ordine Tizia/o apprende che la sua utilità sarà massima se consumerà *X* e *Y* in quantità tali che

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}} = \frac{p_X}{p_Y}$$

Tale condizione (per specifiche funzioni *U*, vedi le prossime note E-Learning sulla derivazione delle funzioni di domanda) gli daranno due valori di *X* e di *Y* che azzerano le derivate e max U. Come le troviamo?

D2 Come facciamo a dire che X* e Y* così ottenute dalle condizioni di stazionarietà sono tali che U(X*, Y*) è = max U sotto vincolo?

Tizia/o sa che non è finita con le condizioni di stazionarietà e procede a calcolare l'Hessiano orlato **(con le 2 variabili valutate ai loro valori di stazionarietà**):

$$\bar{H}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial Y} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial Y \partial X} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial Y^2} \end{bmatrix}}_{3\times3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & p_X & p_Y \\ p_X & \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \\ p_Y & \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \end{bmatrix}}_{3\times3}$$

Calcoliamo

$$\begin{Vmatrix} 0 & p_X & p_Y \\ p_X & \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \\ p_Y & \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \end{Vmatrix} = 2 p_X p_Y \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} - p_Y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - p_X^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} > 0$$

Se le restrizioni che poniamo alla funzione $U(X, Y)$ sono valide (ovvero: utilità marginale decrescente e quindi derivate seconde dirette negative e derivate miste non negative) segue che

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} > \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{p_Y}{p_X}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{p_X}{p_Y}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}}_{<0}\right]$$

e quindi il determinante è positivo. In questo caso Tizia/o avrà individuato una coppia di valori X^* e Y^* che effettivamente generano un massimo di utilità vincolata.

D3. Perché le derivate parziali del vincolo sono inserite nell'Hessiana per formare l'Hessiana "orlata"? E perché la condizione sul determinante ci permette di affermare che siamo in presenza di un massimo (e non di un minimo o di una sella?). Perché gli economisti assumendo che la U sia quasi-concava (come lo si determina in R^2?) se la cavano solo con le condizioni del primo ordine? (vedi anche quanto segue)

D3 è collegata alla D1.

D4 Le X* è Y* (c.d. domande Marshalliane o ordinarie) così ricavate hanno alcune proprietà (più o meno fantasiose). Ve le ricordate? Sapreste dimostrale?

Esercizio consumatore con specifica U

Sia nuovamente $f : R_{++}^2 \rightarrow R$ di classe C^2 che rappresenta un funzione di utilità $U = XY$ su un stesso dominio tutto positivo. Supponiamo nuovamente che Tizia/o disponga di un importo spendibile R da distribuire sui 2 beni, dati i loro prezzi. Tizia/o vuole massimizzare l'utilità rispettando un vincolo sul livello di spesa che deve essere pari a R. Siamo quindi interessati alla ricerca di un massimo di benessere rispetto a X e a Y vincolato dalla spesa e che generi una domanda che tenga conto di R e dei prezzi. Sappiamo che il massimo lo troveremo risolvendo il seguente problema

$$Max_{X,Y}\left(XY\right)\ s.v.\ p_X X + p_Y Y = R$$

La funzione Lagrangiana è

$$\Lambda = XY + \lambda\left[R - p_X X - p_Y Y\right]$$

e le condizioni del primo ordine (supponendo soddisfatte quelle del secondo; farlo per esercizio se fa piacere…) sono

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X} = Y - \lambda p_X = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Y} = X - \lambda p_Y = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = R - p_X X - p_Y Y = 0$$

Ovvero

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_X \\ 0 & 1 & -p_Y \\ -p_Y & -p_X & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ X \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è pari a

$$\Delta = -2p_X p_Y \neq 0$$

e quindi

$$Y_M^* = \frac{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -p_X \\ 0 & 1 & -p_Y \\ -R & -p_X & 0 \end{Vmatrix}}{\Delta} = \frac{-Rp_X}{-2p_X p_Y} = \frac{R}{2p_Y}$$

$$X_M^* = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -p_X \\ 0 & 0 & -p_Y \\ -p_Y & -R & 0 \end{Vmatrix}}{\Delta} = \frac{-Rp_Y}{-2p_X p_Y} = \frac{R}{2p_X}$$

$$\lambda = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -p_Y & -p_X & -R \end{Vmatrix}}{\Delta} = \frac{-R}{-2p_X p_Y} = \frac{R}{2p_X p_Y}$$

Le domande così ottenute esprimono la quantità in relazione a *R* e ai prezzi e prendono il nome di domande ordinarie o Marshalliane (perciò il pedice M), dal nome di un defunto signore inglese già residente nella ridente cittadina turistica inglese di Cambridge, a Nord-Est di Londra.
Quindi con *n* beni la definizione di domanda Marshalliana (chiamate ciascuna M) è per ogni i

$$M_i(p_1,...,p_N,R) = \arg\max_{x_1,...,x_N} U\left(M_1,...,M_N\right)\Big|\sum_{i=}^{N} p_i M_i(p_1,...,p_N,R) \le R \ \ \forall i \in N$$

D1 Sapete valutare il significato di λ? [Teorema Inviluppo è solo un'applicazione…] Vale sempre la D1 della parte generale.

D2 Già conoscevate le seguenti proprietà delle domande ordinarie?

- Sono omogenee di grado 0 nei prezzi e in *R*, così come le domande Hichsiane (da farsi a lezione) lo erano nei prezzi. (si dice: Il consumatore non soffre di c.d. illusione monetaria). Applicando teorema di Eulero:

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial}{\partial p_X}\left[\frac{R}{2p_X}\right]\right\}p_X + \left\{\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{R}{2p_X}\right]\right\}R &= \left(-\frac{R}{2}p_X^{-2}\right)p_X + \left(\frac{1}{2p_X}\right)R \\ &= -\frac{R}{2}p_X^{-1} + \frac{R}{2p_X} \\ &= 0 \\ &= \underbrace{0}_{\substack{\text{Grado di}\\ \text{omogeneità}}} \times \underbrace{\frac{R}{2p_X}}_{\substack{\text{Funzione originaria}\\ \text{di domanda}}}\end{aligned}$$

Sfruttando la proprietà di omogeneità di grado zero ricaviamo che la somma delle elasticità ai prezzi e al reddito è nulla. Infatti, se la domanda Marshalliana del bene x qualsiasi è

$$x(R, p_X, p_Y)$$

Essa è omogenea di grado zero in R e p_X e p_Y per il Teorema di Eulero vale che

$$\frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dp_X}p_X + \frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dp_Y}p_Y + \frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dR}R = 0$$

Allora, dividendo ogni termine per X, otteniamo

$$\frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dp_X}\frac{p_X}{X} + \frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dp_Y}\frac{p_Y}{X} + \frac{dx(R,p_X,p_Y)}{dR}\frac{R}{X} = 0$$

ovvero

$$\eta_{p_X} + \eta_{p_Y} + \eta_R = 0$$

Esempio. Sia

$$x(R,p_X,p_Y) = \frac{Rp_Y}{p_X^2}$$

E' facile ricavare che $\eta_{p_X} + \eta_{p_Y} + \eta_R = -2+1+1=0$. Interpretare.

- Le domande ordinarie rispettano il risultato del 1942 di Roy (noto come identità di Roy) (dal nome di un defunto ingegnere ed importante economista francese) per il quale ciascuna domanda ordinaria corrisponde al rapporto tra derivate parziali rispetto al prezzo e a R nella funzione di utilità indiretta (**metto questa parte se per caso qualcuno ha studiato nel triennio l'utilità indiretta**; che cmq rifaremo a lezione), così come segue

$$\frac{R}{2p_X} = -\left[\frac{v(R,p_X,p_Y)\,/\,\partial p_X}{v(R,p_X,p_Y)\,/\,\partial R}\right] = -\left[\frac{\partial\left[\frac{R^2}{4}\left(p_X p_Y\right)^{-1}\right]/\,\partial p_X}{\partial\left[\frac{R^2}{4}\left(p_X p_Y\right)^{-1}\right]/\,\partial R}\right]$$

$$= -\left[\frac{-\frac{R}{4}\frac{p_X}{p_Y}}{\frac{2R}{4}p_X p_Y}\right]$$

$$= \frac{R}{2p_X}$$

Analoga relazione esiste per y_M.

- Se la U è concava o quasi-concava le domande Mashalliane sono funzioni "single valued" dei prezzi e di *R*: ad un prezzo dato e ad un *R* dato, sarà domandata una **data** quantità del bene, né una unità in più né una unità in meno.

Pro-memoria

Un economista direbbe: Sia una funzione di utilità $u = f(x_1, x_2)$, dove (x_1 e x_2) sono le quantità dei 2 beni che Tizia/o vuole. Assumiamo che $f(x_1, x_2)$ sia continua con derivate dirette e parziali prime e seconde continue e che sia **strettamente quasi-concava**[1]. Perché ciò sia possibile deve valere che il minore principale dispari di

$$H = \begin{bmatrix} 0 & f_{x_1} & f_{x_2} \\ f_{x_1} & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2} & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix}$$

Sia non negativo o non positivo? Ovvero che

$2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2} - \left(f_{x_1}^2 f_{x_2x_2} + f_{x_2}^2 f_{x_1x_1}\right)$ sia non negativo o non positivo?

Se *u* fosse **quasi concava ma non strettamente quasi concava** le curve di indifferenza avrebbero tratti rettilinei e il Massimo non sarebbe unico (fare grafico): ad un valore dato del prezzo corrisponderebbe più di un valore del bene domandato e la relazione tra quantità e prezzo sarebbe una corrispondenza e non una funzione. Esisterebbero più equilibri. Che non vi scappi mai detto …

Sulla base di quanto precede studieremo il teorema dell'iperpiano di supporto e di separazione.

Altre proprietà (e ce ne sono): a lezione.

Perché studiare le proprietà delle funzioni di domanda (e tutto il resto)? Esse servono ad inserire **appropriate restrizioni nelle procedure di stima della domanda**. Lo stesso vale nel caso della produzione e delle funzioni di costo: tutto questo casino è finalizzato all'econometria applicata, non è fine a sé stesso. (l'accento su sé lo raccomanda l'Accademia della Crusca; entità sconosciuta ai cultori del Globish).

[1] In R_+ una funzione $f(x)$ è quasi-concava (*quasi* vuol dire "come se") se $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}\ \forall \lambda \in (0,1)$. In altre parole essa sta sempre sopra il valore minimo che può assumere *f* nel dominio. La concavità e la convessità o la linearità sono "sotto casi". È un'ipotesi piuttosto pilatesca sulla struttura ordinata delle preferenze.