Costi. Esercizi svolti.

Siano, con gli usuali significati,

$$y = f(K,L) = AKL \quad \text{e} \quad C = rK + wL$$

la funzione di produzione (qualsiasi cosa ciò voglia dire…) e il vincolo di spesa per l'acquisto dei fattori per un'impresa qualsiasi. Ci si ricordi che C non è una funzione ma un valore dato dalla somma delle singole spese. Lo potremmo chiamare S, B, V.
Rispondere alle seguenti domande:

a) Ricavare le domande "compensate" ottime di K ed L, qualsiasi cosa tali variabili significhino;
b) Ricavare la **funzione** di costo o di spesa[1] (*expenditure function* nel caso dei consumatori)

$$e(y,w,r)$$

dell'impresa e dire se essa è concava o convessa in y;
c) Mostrare che

$$\partial e(y,w,r)/\partial w = L^* \quad \text{e} \quad \partial e(y,w,r)/\partial r = K^*$$

d) Ricavare il rapporto tra costo marginale (già calcolato al punto c) e costo medio. Dire se esiste un valore finito di y per il quale essi si eguaglino.
e) Sulla base di b) dire se ci aspettiamo che f sia IRS, CRS, DRS. Verificare la risposta con il Teorema di Eulero.

Punto a

Problema: cerchiamo le domande compensate di K ed L, ovvero le domande che dipendono dai prezzi e dalla $\overline{y}$ che si vuole produrre, ovvero: le domande che hanno la proprietà di minimizzare la spesa dai i prezzi di K e L e il vincolo di produzione)

$Min_{K,L}\left(rK + wL\right)$ soggetta al vincolo $y = \overline{y}$. Quindi

$$\Lambda = rK + wL + \lambda\left[\overline{y} - AKL\right]$$

Le condizioni del primo ordine (trascurando quelle del secondo ordine) sono

$$\Lambda_K = r - \lambda AL = 0$$
$$\Lambda_L = w - \lambda AK = 0$$
$$\Lambda_\lambda = \overline{y} - AKL = 0$$

Dividendo la prima per la seconda otteniamo $L = \dfrac{r}{w}K$ e sostituendo nella terza (vincolo sulla produzione) otteniamo

[1] Non confondiamo la funzione di spesa e il vincolo sulla spesa possibile dell'impresa (vincolo contabile di bilancio).

$K^* = \left(\dfrac{w\overline{y}}{Ar}\right)^{\frac{1}{2}}$ e ripetendo la stessa operazione per K otteniamo $L^* = \left(\dfrac{r\overline{y}}{Aw}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Punto b

Sostituiamo L^* e K^* nel vincolo dei costi (ovvero: quanto dobbiamo spendere dati i prezzi dei fattori per produrre la quantità data $\overline{y}$?) e otteniamo

$$e(w,r,\overline{y}) = 2\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}}$$

La funzione di spesa

$$e(w,r,\overline{y}) = 2\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}}$$

è monotona crescente in *y*, continua in *y* (dimostrarlo) e almeno di classe C^2. Anche nel prezzo dei fattori? Come interpretiamo *A* nel contesto della funzione di spesa?

Punto c

La derivata della funzione di spesa rispetto al prezzo dei fattori genera (o fa ritornare a) le domande "condizionali" ovvero a quelle domande di K e di L ottenute al punto a condizionate al vincolo sulla quantità da produrre, ovvero quelle che debbono consentire di produrre la *y* data nel vincolo. (c.d. Lemma di Shephard). Procediamo

$$\frac{\partial C(w,r,\overline{y})}{\partial r} = 2\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}w^{\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}\right) = K^*$$

$$\frac{\partial C(w,r,\overline{y})}{\partial w} = 2\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}\right) = L^*$$

Dimostrare che il grado di queste funzioni è pari al grado della funzione di costo abbassato di uno. [Ovvero: grado di omogeneità della funzione di costo è 3/2 e grado di omogeneità delle domande condizionali dei fattori 1/2. Fatelo con Eulero, ma prima "guardando" direttamente le 3 funzioni]. Deve (si fa per dire) essere sempre così?

Nella teoria del consumo che uso si fa del Lemma di Shephard?

Punto d

Deriviamo due volte rispetto alla quantità

$$mc = \frac{\partial C(w,r,\overline{y})}{\partial \overline{y}} = \left(\frac{wr}{A\overline{y}}\right)^{\frac{1}{2}} > 0 \;\text{ per } \overline{y} < \infty$$

$$\frac{\partial^2 C(w,r,\overline{y})}{\partial \overline{y}^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{wr}{A\overline{y}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{wr}{A\overline{y}^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\left(Awr\right)^{\frac{1}{2}}}{\overline{y}^{\frac{3}{2}}} < 0 \;\text{ per } \overline{y} < \infty$$

La funzione di costo è concava nella quantità.
Costo medio:

$$\frac{C(w,r,\overline{y})}{\overline{y}} = \frac{2}{\overline{y}}\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{wr}{A\overline{y}}\right)^{\frac{1}{2}} > mc$$

Per la tecnologia in questione *AC > mc* per ogni valore finito della quantità. Riprova: si guardi il punto c.

Punto e

Cerchiamo, se esiste, quel valore della quantità che renda minimo *AC* e vediamo se per tale quantità il *mc* coincide con il valore minimo di *AC*. Per un minimo del AC occorre trovare un valore finito della quantità che azzeri la seguente derivata

$$\frac{\partial}{\partial \overline{y}}\left(2\left(\frac{wr}{A\overline{y}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\left(\frac{wr}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}{\overline{y}^{\frac{3}{2}}}$$

Non esiste alcun valore finito della quantità che soddisfi la condizione per un minimo del costo medio. Inoltre confrontando i limiti vediamo che

$$\lim_{\overline{y}\to\infty^+} \frac{C}{\overline{y}} = \lim_{\overline{y}\to\infty^+} mc = 0$$

L'asse della quantità è l'asintoto di *AC* ed *mc*. Quindi *AC* ed *mc* diminuiscono continuamente all'aumentare della quantità e *AC* > *mc* per ogni valore finito della *y*. Che implicazioni avrà questa cosa? Lo dirà (a suo tempo) la "teoria dei fallimenti del mercato in presenza di monopolio naturale".

Insieme al fatto che *C* è concava in *y*, l'andamento rispetto alla quantità di *AC* e *mc* spinge a pensare che l'impresa in questione possa sfruttare sempre regimi di scala crescenti. **Sarà vero?**

Vediamo l'ultimo punto.

Punto f

Teorema di Eulero

$$\frac{\partial y}{\partial K}K + \frac{\partial y}{\partial L}L = ALK + AKL = 2ALK$$

L'omogeneità della funzione (di produzione…) è di grado 2. Quindi IRS. Controprova:

$$A\left(\mu L\right)\left(\mu K\right) = \mu^2 ALK$$

Se μ fosse pari a 3, la triplicazione delle quantità degli input porterebbe ad una produzione 3^2= 9 volte superiore. Quindi, IRS.

ESERCIZIO

Rifate tutto per la funzione

$$y = f(K, L) = AK^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$$

con lo stesso vincolo sulla spesa per i fattori. Ci aspettiamo gli stessi risultati?

ESERCIZIO

Ipotizziamo che produzione e vincolo di spesa adesso siano

$$y = f(K, L) = AK^2L^2 \qquad \text{e} \qquad C = rK + wL$$

Rispondiamo ai punti a) – f).

Punto a

Vogliamo ricavare le domande compensate ottime di *K* ed *L*. Il problema è sempre lo stesso: minimizzare la spesa rispetto a *K* ed *L* con vincolo sulla produzione:

$Min_{K,L}\left(rK + wL\right)$ soggetta al vincolo $y = \overline{y}$. Quindi

$$\Lambda = rK + wL + \lambda\left[\overline{y} - AK^2L^2\right]$$

Le condizioni del primo ordine (trascurando quelle del secondo ordine) sono

$$\Lambda_K = r - \lambda 2AKL^2 = 0$$
$$\Lambda_L = w - \lambda 2ALK^2 = 0$$
$$\Lambda_\lambda = \overline{y} - AKL = 0$$

Dividendo la prima per la seconda otteniamo $L = \frac{r}{w}K$ (come nel caso già discusso) e sostituendo nella terza otteniamo troviamo

$K^{*} = \left(\dfrac{w\overline{y}}{Ar}\right)^{\frac{1}{2}}$ e ripetendo la stessa operazione per K otteniamo $L^{*} = \left(\dfrac{r\overline{y}}{Aw}\right)^{\frac{1}{2}}$ (sempre come nel caso già discusso).

Punto b

Sostituiamo L^* e K^* nel vincolo dei costi possibili e otteniamo

$$e(w,r,\overline{y}) = 2\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si tratta della stessa funzione continua e monotona crescente in *y*, Come interpretiamo *A* nel contesto della funzione di costo? Esattamente come prima.

Punto c

La derivata del costo rispetto al prezzo dei fattori genera (o fa ritornare a) le domande "condizionali" (vedi sopra) dei fattori per via del Lemma di Shephard. Come prima.

Punto d

Come prima

Punto e

Come prima.

Vediamo l'ultimo punto.

Punto f

Teorema di Eulero

$$\frac{\partial y}{\partial K}K + \frac{\partial y}{\partial L}L = \left(2AKL^{2}\right)K + \left(2ALK^{2}\right)L = 4AL^{2}K^{2} = 4f(K,L) = 4y$$

L'omogeneità della funzione (di produzione…) è di grado 4. Quindi IRS. Controprova:

$$A\left(\mu L\right)^{2}\left(\mu K\right)^{2} = \mu^{4}ALK$$

Se μ fosse pari a 3, la triplicazione delle quantità degli input porterebbe ad una produzione 3^4= 81 volte superiore. Quindi, IRS. Quindi AC non ha un minimo per un valore finto della quantità e AC > mc per y < ∞.

ESERCIZIO

Calcoliamo le domande ordinarie dei fattori (ovvero le domande non condizionate dal vincolo di permette la produzione della quantità data). Possiamo usare direttamente le c.p.o. oppure ricordarci che il problema deve essere reimpostato come segue

$Max_{K,L}\, y$ soggetta al vincolo $C = rK + wL$. Quindi

$$\Lambda = AKL + \lambda\left[C - rK - wL\right]$$

Le condizioni del primo ordine (trascurando quelle del secondo ordine) sono

$$\Lambda_K = AL - \lambda r = 0$$
$$\Lambda_L = AK - \lambda w = 0$$
$$\Lambda_\lambda = C - wL - rK = 0$$

che riscriviamo in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} A & 0 & -r \\ 0 & A & -w \\ w & r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ K \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è *2Arw* che è diverso da zero per prezzi degli input diversi da zero. Dato che sono soddisfatte le condizioni del teorema di Rouché – Capelli (**verificare con i ranghi**), otteniamo

$$L_M = \frac{C}{2w} \quad ; \quad K_M = \frac{C}{2r} \quad ; \; \lambda = A\frac{C}{2rw}$$

Che interpretazione diamo al λ?

La *M* deponente è stata aggiunta per non confondere questa che è la domanda dei fattori ottima a certi fini (ovvero: quali L e K dobbiamo domandare se vogliamo max *y* rispettando un vincolo sulla spesa?) con l'altra domanda (detta compensata) che è ottima ad altri fini (quali L e K dobbiamo domandare se vogliamo min C rispettando un vincolo sulla produzione?). È chiaro che (come per il caso delle scelte dei consumatori…)

$$r\left(\frac{C}{2r}\right) + w\left(\frac{C}{2w}\right) = C$$

Uno spunto di riflessione in più.

AC senza minimo per valori finiti di *y* (e quindi sempre > di *mc*) si verifica sempre? O dipende dalla tecnologia incorporata nella *f*? Proviamo cosa succede con

$y = f(K,L) = A\sqrt{KL}$ e $C = rK + wL$

(di che grado è la *f* questa volta?)

Allora

$Min_{K,L}\ rK + wL$ soggetta al vincolo sulla produzione.

Quindi

$$\Lambda = rK + wL + \lambda\left[\overline{y} - A\sqrt{KL}\right]$$

Le condizioni del primo ordine (trascurando quelle del secondo ordine) sono

$$\begin{aligned}
\Lambda_K &= r - \lambda\frac{A}{2}\left(KL\right)^{-\frac{1}{2}} L = 0 \\
\Lambda_L &= w - \lambda\frac{A}{2}\left(KL\right)^{-\frac{1}{2}} K = 0 \\
\Lambda_\lambda &= \overline{y} - A\sqrt{KL} = 0
\end{aligned}$$

Dividendo la prima per la seconda otteniamo $L = \frac{r}{w}K$. Sostituendo nel vincolo sulla produzione abbiamo

$$\overline{y} = A\sqrt{K\frac{r}{w}K} = AK\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \overline{y} = A\sqrt{L\frac{w}{r}L} = AL\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Da cui

$$K_m^* = \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\overline{y}}{A} \qquad L_m^* = \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\overline{y}}{A}$$

ESERCIZIO

Il sistema delle cpo non è lineare. Riscrivere le condizioni del primo ordine di cui sopra nei logaritmi delle variabili per ottenere

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ k \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

dove

$$l = \ln(L)\ ;\ k = \ln(K)\ ;\ \mu = \ln(\lambda)\ ;\ a = \ln\left(\frac{A}{2r}\right);\ b = \ln\left(\frac{A}{2w}\right)\ ;\ c = -\ln\left(\frac{A}{\overline{y}}\right)$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è pari a –1 che è diverso da zero. E le soluzioni sono quelle ottenute sopra. **Ricavare che, in corrispondenza del minimo valore (vincolato) della spesa,**

$$\lambda = \frac{2}{A}\sqrt{rw}\,.$$

Sostituiamo L^* e K^* nel vincolo dei costi otteniamo

$$e(w,r,\overline{y}) = r\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\overline{y}}{A} + w\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\overline{y}}{A} = 2\frac{\overline{y}}{A}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}}$$

La funzione di spesa è monotona crescente in *y*, continua in *y* (dimostrarlo) e almeno di classe C^2. Anche nel prezzo dei fattori? Come interpretiamo *A* nel contesto della funzione di spesa? Rifare i calcoli precedenti.

Deriviamo rispetto alla quantità

$$mc = \frac{\partial e(w,r,\overline{y})}{\partial \overline{y}} = \frac{2}{A}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}} > 0$$

[Domanda: come interpretate il fatto che mc = λ?]

$$\frac{\partial^2 e(w,r,\overline{y})}{\partial \overline{y}^2} = 0$$

La funzione di costo è lineare nella quantità e il *mc* è costante.
Costo medio:

$$\frac{e(w,r,\overline{y})}{\overline{y}} = \frac{2\overline{y}}{A\overline{y}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{A}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}} = mc$$

Per la tecnologia in questione *AC* = *mc* per ogni valore finito della quantità. X riprova si guardi il punto c.

Punto e

Cerchiamo, se esiste, quel valore della quantità che renda minimo *AC* e vediamo se per tale quantità il *mc* coincide con il valore minimo di *AC*. Per un minimo del AC occorre trovare, se esiste, un valore finito della quantità che azzeri la seguente derivata

$$\frac{\partial}{\partial \overline{y}}\left(\frac{2}{A}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Nel nostro caso AC è una costante ed è pari a mc e non esiste un valore di y che, azzerando la derivata di AC ne determini un minimo. Stesso discorso per mc.
Sapete di casi in cui AC è senza minimo per valori finiti di *y* e AC > di *mc*? Dipende dalla tecnologia incorporata nella *f*?

Proviamo ancora cosa succede con

$$y = f(K,L) = A\sqrt[3]{KL} \quad \text{e} \quad C = rK + wL$$

(di che grado è la *f* questa volta?)

Allora

$Max_{K,L}\, y$ soggetta al vincolo $C = rK + wL$. Quindi

$$\Lambda = rK + wL + \lambda\left[\overline{y} - A\sqrt[3]{KL}\ \right]$$

Le condizioni del primo ordine (trascurando quelle del secondo ordine) sono

$$\Lambda_K = r - \lambda\frac{A}{3}\left(KL\right)^{-\frac{2}{3}} L = 0$$
$$\Lambda_L = w - \lambda\frac{A}{3}\left(KL\right)^{-\frac{2}{3}} K = 0$$
$$\Lambda_\lambda = \overline{y} - A\sqrt[3]{KL} = 0$$

Dividendo la prima per la seconda otteniamo $L = \frac{r}{w}K$. Sostituendo *L* e *K* nel vincolo sulla produzione abbiamo

$$\overline{y} = A\sqrt[3]{K\frac{r}{w}K} = AK^{\frac{2}{3}}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\overline{y} = AL^{\frac{2}{3}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Da cui

$$K_m^* = \left[\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\overline{y}}{A}\right]^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$L_m^* = \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Sostituiamo *L** e *K** nel vincolo dei costi otteniamo

$$e(w,r,\overline{y}) = r\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{3}{2}} + w\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{3}{2}} = 2\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{3}{2}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}}$$

La funzione di spesa è monotona crescente in y, continua in y (dimostrarlo) e almeno di classe C^2. Anche nel prezzo dei fattori? Come interpretiamo A nel contesto della funzione di spesa? Rifare i calcoli precedenti.

Deriviamo rispetto alla quantità

$$mc = \frac{\partial C(w,r,\overline{y})}{\partial \overline{y}} = \frac{3}{A}\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}} = 3A^{\frac{2}{3}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}}\overline{y}^{\frac{1}{2}} > 0$$

$$\frac{\partial^2 C(w,r,\overline{y})}{\partial \overline{y}^2} = \frac{3}{2A^2}\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}} > 0$$

La funzione di costo è convessa nella quantità e il *mc* è crescente.
Costo medio:

$$\frac{C(w,r,\overline{y})}{\overline{y}} = \frac{2}{\overline{y}}\left(\frac{\overline{y}}{A}\right)^{\frac{3}{2}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}} = 2A^{\frac{2}{3}}\left(wr\right)^{\frac{1}{2}}\overline{y}^{\frac{1}{2}} < mc \quad \forall y < \infty$$

Per la tecnologia in questione (che tipo? IRS, CRS, DRS?) $AC < mc$ per ogni valore finito della quantità. Si guardi il punto c.

OVVIAMENTE NON MI ASPETTO RISPOSTE A TUTTE LE DOMANDE.
Quindi niente preoccupazioni.