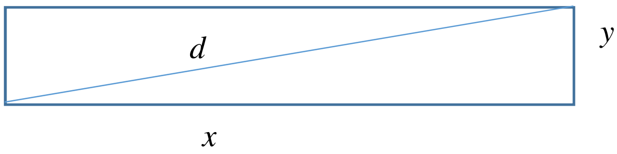
FUNZIONI POSITIVAMENTE OMOGENEE DI PRODUZIONE E RENDIMENTI DI SCALA

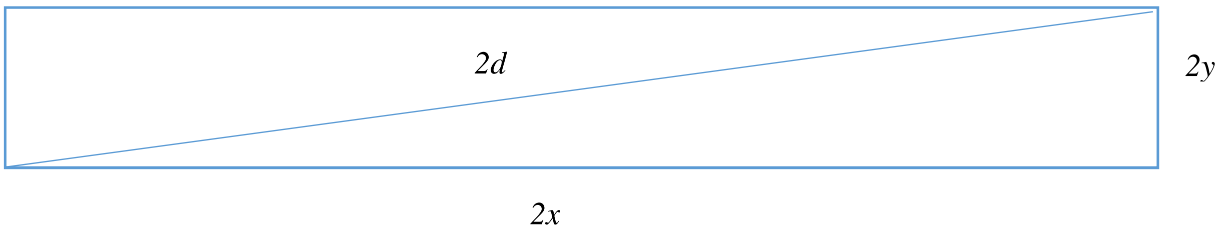
DISPENSE INTEGRATIVE (Non perdere tempo se già a conoscenza del tema)

1 FUNZIONI OMOGENEE

Supponiamo di avere un rettangolo di base *x* e di altezza *y*:



La lunghezza della diagonale del rettangolo è una funzione *d(x, y)* della base *x* e dell' altezza *y* del rettangolo. In particolare se raddoppio tanto la base quanto l'altezza raddoppia anche la diagonale:



Infatti:

$$d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

per cui

$$\begin{aligned} d(2x,2y) &= \sqrt{2^2 x^2 + 2^2 y^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ &= 2d(x,y) \end{aligned}$$

Più in generale se moltiplico per uno stesso fattore non negativo μ sia la base sia l'altezza del rettangolo, anche la diagonale varia **nella stessa misura**, cioè:

$$\begin{aligned} d(\mu x,\mu y) &= \sqrt{\mu^2 x^2 + \mu^2 y^2} \\ &= \mu\sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \mu d(x,y) \end{aligned}$$

Per l'**area** del rettangolo vale un discorso analogo ma con una differenza sostanziale. Anche l'area è ovviamente una funzione della base e dell'altezza

$$A(x,y) = xy$$

ma essendo l'area il prodotto di base per altezza, raddoppiando la base e raddoppiando l'altezza l'area non raddoppia ma **quadruplica**:

$$\begin{aligned} A(2x, 2y) &= 2x2y \\ &= 2^2 xy \\ &= 2^2 A(x, y) \end{aligned}$$

e più in generale:

$$\begin{aligned} A(\mu x, \mu y) &= \mu x \mu y \\ &= \mu^2 xy \\ &= \mu^2 A(x, y) \end{aligned}$$

Esprimeremo questi comportamenti delle funzioni prese in considerazione dicendo che la diagonale di un rettangolo è funzione omogenea di primo grado delle due variabili (base e altezza) mentre l'area del rettangolo è funzione omogenea di secondo grado delle stesse variabili. Diciamo di primo grado quando l'esponente di μ è 1; di secondo grado quando l'esponente di μ è 2; e così via.

ESERCIZIO. Ripetere lo stesso calcolo per il volume del parallelepipedo rettangolo di larghezza x, profondità y e altezza h. Valutare il grado di omogeneità.

Sulla base degli esempi svolti sino a questo punto, diamo la seguente

DEFINIZIONE. In generale si dice che la funzione $f(x, y)$ di classe C^1 è omogenea di grado k se comunque si prenda un numero $\alpha > 0$ si ha, in tutto il dominio della funzione:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y)$$

Quindi, ad esempio, la funzione:

$$f(x, y) = 2x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 2\left[\sqrt[3]{xy^2}\right]$$

è omogenea di primo grado. Per verificarlo moltiplicando per un qualsiasi $\alpha > 0$ sia la x sia la y, otteniamo

$$2\left(\sqrt[3]{\alpha x (\alpha y)^2}\right) = 2\left(\sqrt[3]{\alpha^3 x y^2}\right) = \alpha\left(2\sqrt[3]{xy^2}\right)$$

dove chiaramente l'esponente di α è uno.

Una funzione positivamente omogenea gode delle seguenti

PROPRIETA'

1. Se $f(x, y)$ definita su un insieme aperto A è differenziabile e omogenea di grado α le sue derivate parziali prime sono funzioni omogenee di grado $\alpha - 1$. (Abbassamento di un grado)

2. Teorema di Eulero: Se $f(x, y)$ è dotata di derivate parziali prime nell'aperto A allora è omogenea di grado k se e solo se è verificata la relazione:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}y = kf(x,y)$$

Oppure, supponendo n variabili indipendenti: $f: R^n \to R$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} x_i = kf(x_1, \dots, x_n)$$

Dimostrazione (elementare). Alla funzione $f(x_1,\dots,x_n)$ omogenea di grado k applichiamo prima la sostituzione $x_i^{'}, = \alpha x_i$ ottenendo

$$f(x_1^{'},\dots,x_N^{'}) = \alpha^k f(x_1,\dots,x_N)$$

Differenziando ora rispetto ad α otteniamo

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i^{'}} \frac{\partial x_i^{'}}{\partial \alpha} = k\alpha^{k-1} f(x_1,\dots,x_N)$$

Sostituiamo le derivate

$$\frac{\partial x_i^{'}}{\partial \alpha} = x_i$$

nell'espressione precedente e otteniamo

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i^{'}} x_i = k\alpha^{k-1} f(x_1,\dots,x_N)$$

Il risultato ottenuto vale per ogni $\alpha > 0$. In particolare ponendo $\alpha = 1$ (interpretare) si ottiene

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf(x_1,\dots,x_N)$$

ESEMPIO. Data la funzione: $f(x,y) = yx^3 + xy^3$ le derivate parziali sono:

$$f_x(x,y) = 3yx^2 + y^3$$
$$f_y(x,y) = x^3 + 3xy^2$$

e quindi:

$$\begin{aligned} xf_x(x,y) + yf_y(x,y) &= x\left(3yx^2 + y^3\right) + y\left(x^3 + 3xy^2\right) \\ &= 4yx^3 + 4xy^3 \\ &= 4f(x,y) \end{aligned}$$

per cui la funzione è omogenea di grado 4 come possiamo facilmente verificare (okkio agli esponenti):

$$
\begin{aligned}
f(\mu x, \mu y) &= \mu y\left(\mu x\right)^3 + \mu x\left(\mu y\right)^3 \\
&= \mu^4 f(x,y)
\end{aligned}
$$

Le derivate parziali della funzione sono quindi funzioni omogenee di grado 4 – 1 = 3, infatti:

$$
\begin{aligned}
f_x(\mu x, \mu y) &= 3\mu y\left(\mu x\right)^2 + \left(\mu y\right)^3 \\
&= \mu^3 f_x(x,y)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f_y(\mu x, \mu y) &= \left(\mu x\right)^3 + 3\mu x\left(\mu y\right)^2 \\
&= \mu^3 f_y(x,y)
\end{aligned}
$$

FUNZIONI DI PRODUZIONE, GRADO DI OMOGENEITÀ E RENDIMENTI DI SCALA

Applichiamo le funzioni omogenee al caso della funzione di produzione (dando per note le sue caratteristiche generali)

ESEMPIO 1

Sia la funzione di produzione tipo Cobb-Douglas a due fattori:

$$f(x,y) = kx^p y^q$$

in cui *k* è una costante e *x* e *y* sono due fattori di produzione (significhi quello che significhi…), mentre *p* e *q* sono (per semplicità) numeri reali non nulli. Avremo:

$$f(\mu x, \mu y) = k\left[\left(\mu x\right)^p \left(\mu y\right)^q\right] = \mu^{p+q} f(x,y)$$

per cui la funzione di Cobb-Douglas è omogenea di grado $p + q$.

Si proceda adesso al calcolo delle derivate seconde miste [derivata rispetto a *x* della derivata prima parziale rispetto a *y*, ovvero $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$, e viceversa; in genere si scrive $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$] e verificare che $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$. Vale quindi il teorema di Young. Applicandolo alla funzione Cobb-Douglas di cui sopra ottenendo

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = kpx^{p-1}qy^{q-1} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

La produttività marginale di *x* varia al variare di *y* in modo identico a come varia la produttività marginale di *y* al variare di *x*.

Esercizio. Sia la funzione di produzione Cobb-Douglas

$$y = AK^z L^n$$

con z e n reali positivi qualsiasi. Immaginando il solito vincolo di spesa per l'impresa $C = rk + wL$:

a) Studiare il grado di omogeneità della funzione di produzione
b) Applicare per verifica il teorema di Eulero
c) Valutare la produttività marginale singola e incrociata dei fattori
d) Ricavare dall'appropriata Lagrangiana le domande ottime di L e K
e) Studiare il grado di omogeneità delle domande ottime
f) Mettere in relazione il grado di omogeneità della funzione di produzione e quello delle domande dei fattori
g) Studiare (a+b+c+d+e+f) nel caso particolare in cui z + n = 1.

a) Il vincolo non serve a questo. Scriviamo

$$f(\mu K, \mu L) = A\Big[(\mu K)^z (\mu L)^n\Big] = \mu^{z+n} A K^z L^n$$

La funzione è omogenea di grado $z + n$.

b) Neppure adesso serve il vincolo. Calcoliamo le derivate parziali e applichiamo Eulero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial K}K + \frac{\partial y}{\partial L}L &= \left(zAK^{z-1}L^n\right)K + \left(nAK^zL^{n-1}\right)L \\ &= zAK^zL^n + nAK^zL^n \\ &= (z+n)AK^zL^n\end{aligned}$$

che verifica il teorema di Eulero. La funzione è omogenea di grado $z + n$.

c) I termini tra parentesi al punto b) indicano la produttività marginale dei due fattori. E' ovviamente positiva ed è crescente per $z > 1$ ed $n > 1$. Per la produttività marginale "incrociata" deriviamo ciascuna derivata parziale per l'altra variabile:

$$\partial\frac{\left(zAK^{z-1}L^n\right)}{\partial L} = znAK^{z-1}L^{n-1} = znAK^{z-1}L^{n-1} = \partial\frac{\left(nAK^zL^{n-1}\right)}{\partial K}$$

La produttività marginale incrociata è simmetrica e Young è soddisfatto.

d) Scriviamo la Lagrangiana (adesso serve il vincolo)

$$\Lambda = AK^zL^n - \lambda\Big[wL + rK - C\Big]$$

Le condizioni del primo ordine (assumendo soddisfatte quelle del secondo) sono

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial K} = zAK^{z-1}L^n - \lambda r = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L} = nAK^zL^{n-1} - \lambda w = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = wL + rK - C = 0 \qquad (3)$$

Dividendo la (1) per la (2) otteniamo

$$\underbrace{\frac{zL}{nK}}_{SMST} = \underbrace{\frac{r}{w}}_{\text{Prezzo relativo dei fattori}} \qquad (4)$$

Ricavando prima L e poi K da (4) e sostituendoli uno alla volta in (3) otteniamo le domande dei fattori:

$$K^* = \frac{zC}{r} \qquad\qquad L^* = \frac{nC}{w}$$

e) Le due funzioni di domanda dei fattori sono omogenee in C ed r e in C e w, rispettivamente? E se si, di che grado? Valutiamo con Eulero entrambi i casi

$$\frac{zC}{r} - \frac{zC}{r^2}r = 0 = 0\left(K^*\right)$$
$$\frac{nC}{w} - \frac{nC}{w^2}w = 0 = 0\left(L^*\right)$$

Le domande dei fattori sono omogenee di **grado zero**. Che implicazioni "economiche" ha questa cosa? Provare a moltiplicare per 100 le variabili C ed r nella prima e C e w nella seconda. Cambia la domanda di K ed L? Conoscete altre funzioni di domanda con questa proprietà? (pensate ai consumatori)

f) $n + z \geq 0$ Ovvero: il grado di omogeneità della funzione di produzione è maggiore del grado di omogeneità delle domande fattori

g) Farlo per esercizio, anche alla luce di quanto detto al punto c.

3. APPROFONDIMENTO SUI RENDIMENTI DI SCALA

Torniamo al caso della funzione $f: R^2 \to R$

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Di che grado è questa funzione? Applico Eulero per verificare se

$$\frac{\partial Y}{\partial K}K + \frac{\partial Y}{\partial L}L = (\alpha + \beta)AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Facendo i calcoli verifico che effettivamente è così (FATELI).

Nulla abbiamo detto però del valore di α e β. Facciamo alcuni casi:

a) **α** = 1 e β = 1. Grado della funzione: 2. Quindi mi aspetterei che se moltiplicassi ogni fattore per $\mu = 2$ (un raddoppio!) il prodotto totale aumenterebbe di $\mu^2 = 2^2 = 4$ volte. E' vero? Vediamo:

$$A2^{\alpha}K^{\alpha}2^{\beta}L^{\beta} = 2^{\alpha+\beta}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = 2^{2}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = 4AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Quindi poiché il raddoppio dei fattori fa quadruplicare la produzione siamo in presenza di una tecnologia produttiva che mostra **rendimenti di scala crescenti**.

b) α = 2 e β = 2. Svolgere e verificare che è un caso analogo a quello sub. a, sempre supponendo un raddoppio della quantità dei fattori.

c) α = 0.5 e β = 0.5. Eulero conferma che in questo caso il grado di omogeneità della funzione è 1:

$$\frac{\partial Y}{\partial K}K + \frac{\partial Y}{\partial L}L = (\alpha + \beta)AK^{\alpha}L^{\beta} = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Allora essendo la funzione omogenea di grado 1, i **rendimenti di scala sono costanti**. Il raddoppio dei fattori genera un raddoppio del prodotto (niente di più e niente di meno):

$$A2^{\alpha}K^{\alpha}2^{\beta}L^{\beta} = 2^{\alpha+\beta}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = 2^{1}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = 2AK^{\alpha}L^{\beta}$$

d) α = 0.2 e β = 0.3. Eulero conferma che il grado di omogeneità è sempre α + β = 0.2 + 0.3 = 0.5 < 1. Che succede raddoppiando la quantità dei fattori?

$$A2^{\alpha}K^{\alpha}2^{\beta}L^{\beta} = 2^{\alpha+\beta}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = 2^{0.5}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = \sqrt{2}(AK^{\alpha}L^{\beta})$$

Quindi il prodotto totale aumenta di circa 1.41 volte ma non raddoppia o più che raddoppia. La tecnologia mostra **rendimenti decrescenti**.

4 UNA DIGRESSIONE (SI SPERA) UTILE

Supponiamo di avere una funzione di produzione omogenea di grado 1 (si dice linearmente omogenea, che non vuol dire che la funzione sia in sé lineare[1]). Sia tale funzione omogenea di grado 1 la seguente

$$Y = f(K,L)$$

Prima proprietà. In una funzione di produzione omogenea di grado 1, il prodotto medio dei fattori può essere espresso in termini del solo rapporto *k = K/L*.

Verifica: sia il solito μ dei paragrafi precedenti in questo caso *1/L*. Moltiplichiamo gli argomenti per tale fattore e otteniamo

$$Y = f\left(\frac{K}{L},\frac{L}{L}\right) = f\left(\frac{K}{L},1\right) = f\left(k,1\right)$$

Questo vuol dire che la *Y* è diventata una qualche funzione della sola *k*, diciamo *φ(k)*. Allora il prodotto medio di *L* sarà

$$\frac{Y}{L} = \frac{f\left(K,L\right)}{L} = f(k,1) = \varphi(k)$$

e il prodotto medio di *K* sarà

$$\frac{Y}{K} = \frac{f\left(K,L\right)}{K} = \frac{f\left(K,L\right)}{L}\frac{L}{K} = \frac{f(k,1)}{k} = \frac{\varphi(k)}{k}$$

Interpretazione. Con una tecnologia produttiva omogenea di grado 1, l'aumento delle quantità dei fattori effettuato mantenendo costante il loro rapporto *K/L* mantiene costante il prodotto medio. Le funzioni che esprimono il prodotto medio (vedi sopra) sono omogenee di grado zero nelle variabili *K* ed *L* (perché?).

Seconda proprietà. In una funzione di produzione omogenea di grado 1, il prodotto marginale dei fattori può essere espresso in termini del solo rapporto *k = K/L*.

Verifica: Partiamo dalla equazione del prodotto medio di *L*

$$\frac{Y}{L} = \frac{f\left(K,L\right)}{L} = f(k,1) = \varphi(k)$$

e riscriviamo la funzione di produzione come segue

$$Y = L\varphi(k)$$

Deriviamo rispetto a *K*:

[1] La funzione $g(x,y,z) = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{2z^2}{x}$ non è lineare ma è omogenea di grado 1.

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left[L\varphi(k)\right] = L\frac{\partial\varphi(k)}{\partial K} = L\frac{d\varphi(k)}{dk}\underbrace{\left(\frac{\partial k}{\partial K}\right)}_{\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{1}{L}} =$$

$$= L\frac{d\varphi(k)}{dk}\left(\frac{1}{L}\right)$$

$$= \frac{d\varphi(k)}{dk}$$

Interpretazione. Con una tecnologia produttiva omogenea di grado 1, il prodotto fisico marginale del fattore (*K* in questo caso) è funzione esclusiva del rapporto *K/L*. Come per il prodotto medio, anche l'equazione che esprime il prodotto fisico marginale è omogenea di grado zero (il prodotto fisico marginale non cambia se k resta costante all'aumentare di *K*).

Ripetere lo stesso calcolo per *L* e ricavare che

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \varphi(k) - k\frac{\partial\varphi(k)}{\partial L}$$

Anche per *L* vale quanto affermato per *K*?

Esercizio. Che succede se $\mu = 1/K$?

Estensioni

I risultati relativi alle funzioni omogenee di primo grado si estendono al caso di *N* variabili indipendenti. Sia

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$$

Poniamo in questo caso μ pari a $1/x_1$. Moltiplichiamo gli argomenti per tale fattore e otteniamo

$$Y = x_1\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_N}{x_1}\right)$$

L'estensione al caso di *N* variabili vale anche il teorema di Eulero, per cui

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i = Y$$

Ed entrambe le estensioni si "estendono" ulteriormente al caso di omogeneità $r > 1$. Quindi

$$Y = x_1^r\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_N}{x_1}\right)$$: Omogeneità di grado *r*

$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = rY$: Teorema di Eulero nel caso di omogeneità di grado *r* con *N* variabili indipendenti.