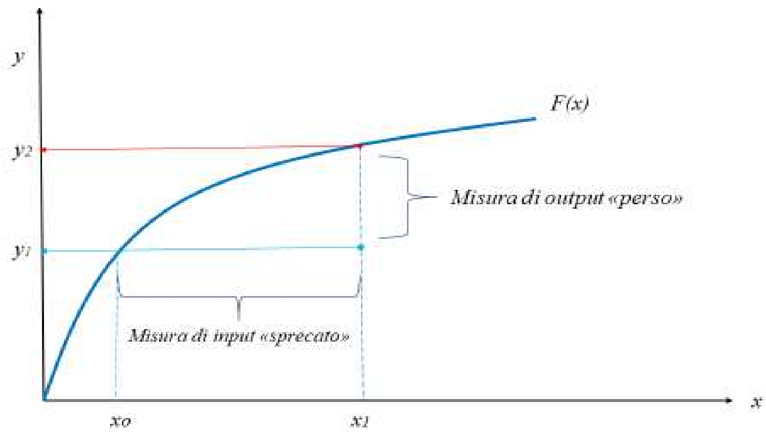
BREVISSIME NOTE SU FUNZIONE DI DISTANZA NELLO SPAZIO DEGLI INPUT

Intende agevolare lo studio dei paragrafi 5.8 e seguenti del capitolo 5 del testo di Cornes.

Definizioni

Siano $\boldsymbol{x} = (x_1,,,,x_N)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1,,,,y_M)$ i vettori degli N input e degli M output di un'impresa. Definiamo l'insieme della tecnologia disponibile con $T = \left\{ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x} \in R_+^N, \boldsymbol{y} \in R_+^M \,\middle|\, \boldsymbol{x} \text{ può produrre } \boldsymbol{y} \right\}$ e R_+^N che indica un insieme di n-tuple reali non negative. Se $N > 1$ e $M = 1$ abbiamo la produzione di un solo output e la tradizionale funzione di produzione $F: R_+^N \to R_+$ che per $N = 1$ si riduce a $y \leq F(x)$. In quest'ultimo caso la F deve essere intesa come il livello massimo di produzione ottenibile impiegando in modo efficiente il fattore x al fine di avere **esattamente** $y = F(x)$. Supponendo che F sia una funzione concava qualsiasi, il grafico seguente illustra la "efficiente" relazione tra input e output:



Se la disponibilità di x_1 permette effettivamente di ottenere y_2 possiamo dire che $y_2 = F(x_1)$ e che la produzione è efficiente: non si realizza nessuno spreco e si ottiene il massimo prodotto che la tecnologia permette di ottenere. Se invece l'impiego di x_1 genera $y_1 < y_2$ abbiamo $y < F(x_1)$ e ciò provoca spreco di risorse misurabile in due modi alternativi (ma collegati):

Nello spazio (in questo caso unidimensionale) degli output la misura dello spreco è **l'output perso (cioè non prodotto)** inteso come la differenza $y_2 - y_1$ dato x_1

Nello spazio (in questo caso unidimensionale) degli input la misura dello spreco è **l'input sprecato (cioè usato in eccesso)** inteso come la differenza $x_1 - x_0$ dato y_1.

Entrambi i modi permettono anche di dare un "valore" monetario all'inefficienza. Nel caso dell'output perso il costo opportunità dell'inefficienza è $p(y_2 - y_1)$ dove p è il prezzo unitario che i consumatori pagano per y. Nel caso dell'eccesso di input, il costo dell'inefficienza è $w(x_1 - x_0)$ dove w è il prezzo unitario dell'input.
La misurazione alternativa del costo dell'inefficienza la si ricava dalla seconda parte del seguente esercizio.

Esercizio

Provare a replicare la rappresentazione grafica dell'inefficienza nel caso $N = 2$ e $M = 1$ usando gli isoquanti (convessi) dell'impresa.
Provare a replicare la rappresentazione grafica dell'inefficienza nel caso $N = 1$ e $M = 1$ usando la funzione di costo totale ipotizzando una $C(y)$ monotona crescente in $y \in R_+$.

Sulla base del grafico della funzione di produzione e dell'esercizio relativo ai costi possiamo dire che vi sono **almeno due modi per misurare l'inefficienza** nella produzione: quello offerto dallo studio della funzione di produzione e quello offerto dallo studio della funzione di costo[1]. La funzione di distanza offre un altro strumento, duale ma potenzialmente preferibile ai primi due (e ovviamente anche al terzo di cui alla nota) **sul piano empirico**. La ragione della preferenza starà in questo: il primo modo va in crisi quando $M > 1$ (pensateci) e il secondo modo va in crisi non appena ci rendiamo conto che i prezzi degli input (argomento della funzione di costo da sottoporre a stima) **non sono esogeni**.

Sino a che $F: R_+ \rightarrow R_+$ le cose sono concettualmente semplici. Con $F: R^2 \rightarrow R$ si complicano un pochino come è reso evidente dalla prima parte dell'esercizio. Ma come misuriamo l'eventuale scostamento dall'efficienza quando siamo in R^{N+M}?

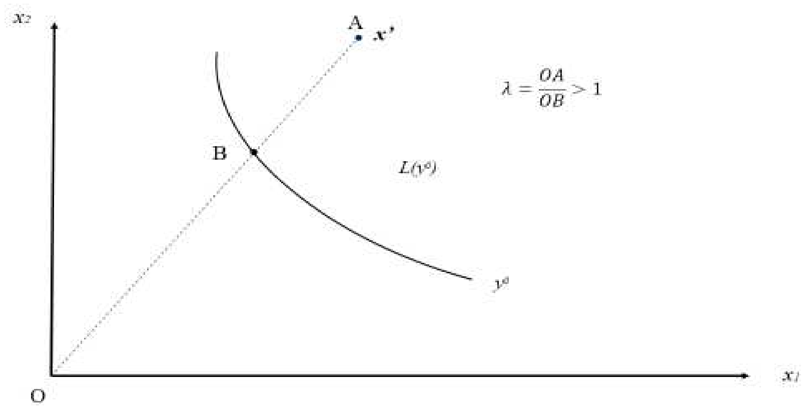
La funzione di distanza nello spazio degli input

Una funzione $D_I : R_+^M \times R_+^N \rightarrow R_+ \cup \{+\infty\}$ e definita come $D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \underset{\lambda}{Sup}\left\{\lambda > 0 \middle| \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\lambda}\right) \in L(\boldsymbol{y}) \text{ per tutti } \boldsymbol{y} \in R_+^M\right\}$ dove $L(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x} : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$ (cosa rappresenta questo insieme? Che proprietà deve possedere?) viene detta **funzione di distanza (diretta) nello spazio degli input**. λ è quindi il **massimo valore dello scalare che dobbiamo applicare al vettore degli input per portarli sulla frontiera minima** dell'insieme degli input disponibili compatibile con la produzione dell'output richiesto.
A questo punto

> Usando quanto elaborato nell'Esercizio precedente e supponendo $M = 1$, fare il grafico dell'isoquanto relativo ad un $y^o > 0$ a piacere e del vettore $\boldsymbol{x'} = (x'_1, x'_2)$ superiore al vettore minimo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ compatibile con l'isoquanto di y^o. Poi rispondere alle seguenti domande di verifica. a) Dove si trova $L(y^o)$? b) Come si deve interpretare il rapporto tra l'origine e $\boldsymbol{x'}$ e l'origine e $\boldsymbol{x}$ in termini di funzione di distanza ovvero di λ? c) A cosa corrisponde λ nel grafico? d) Nella situazione descritta (ovvero trovandoci in $\boldsymbol{x'}$), la D_I è maggiore, uguale o minore di 1?

Prima cercate di cavarvela da sole/i, poi guardate il grafico seguente che aiuta a dare le risposte e a fare il punto concettuale. Confrontate con la vostra risposta alla prima richiesta dell'esercizio precedente, dopo aver individuato nel grafico il punto $\boldsymbol{x}$.

[1] In realtà c'è anche la funzione del profitto, che dipende dai prezzi di input e output. Noi la tralasciamo.



Per eliminare l'eccesso di input occorre ridurre in modo equi proporzionale la quantità dei due input lungo il segmento OA (come mai?). λ è la misura di questa riduzione. Se già fossimo in B, OA = OB e la funzione di distanza sarebbe pari a 1.
A questo punto dovreste poter rispondere alle seguenti domande

1) Tracciando un vincolo di bilancio, usare la funzione di distanza per mostrare la possibile scomposizione dell'inefficienza in tecnica e allocativa (facoltativo).
2) La forma dell'isoquanto interferisce con la risposta da dare al punto b?
3) Se fossimo in condizioni di efficienza tecnica sarebbe giusto dire che $D_I(\boldsymbol{x}, y) = 1$? Vedi grafico precedente.

Se alla domanda d) avete risposto che λ > 1, dovrebbe risultare chiaro che la situazione ottimale è quella per la quale il vettore effettivamente impiegato per produrre y^o appartiene all'isoquanto ovvero al contorno inferiore di *L(y^o)*. In questo caso siamo già in condizioni di efficienza tecnica **e non c'è niente da "riscalare**" mediante un appropriato λ > 1 al fine di ridurre l'eccesso di input (che non c'è!) e quindi la $D_I(\boldsymbol{x}, y)$ è già uguale a 1.

4) Che valore assumerebbe $D_I(\boldsymbol{x}, y)$ se $y = y^o = 0$ e l'impresa continuasse a impiegare $\boldsymbol{x}'$?
5) E' ragionevole supporre che $L(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x} : D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 1\}$? E che vuol dire?
6) E' corretto dire che il vettore degli input nel punto B è $\boldsymbol{x}' / D_I(\boldsymbol{x}', y^0)$?

Proprietà di D_I (senza dimostrazioni)

Enunciamo le proprietà della funzione D_I. Di ciascuna cercare una spiegazione intuitiva.

1. $D_I(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è non decrescente in $\boldsymbol{x}$

2. $D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ è non crescente e quasi concava in $\boldsymbol{y}$

3. $D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ è concava in $\boldsymbol{x}$

4. $D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ è omogenea di grado 1 in $\boldsymbol{x}$

5. $\frac{\partial}{\partial x_i} D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = w_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv$ Domanda ordinaria inversa del fattore i

6. $\frac{\partial}{\partial y_j} D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial}{\partial y_j} C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$

Commentiamo solo la 4) e la 5). Formalmente la 4) vuol dire che

$D_I(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lambda D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ per tutti gli $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ in R_+^{N+M} e i $\lambda > 0$ che è la normale condizione di omogeneità lineare. Quindi usando il Teorema di Eulero e la (5) abbiamo

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) x_i = \sum_{i=1}^{N} w_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) x_i$$

La 5) implica che potremo usare la D_I a fini econometrici perché essa consentirà di applicare il lemma di Shephard relativo alla funzione di costo e ci permette di affermare che la funzione di distanza eredita le restrizioni della funzione di costo: omogeneità lineare negli input (vedi sopra proprietà 4) e simmetria. Utili a fini econometrici. Il suo buono è che essa è **agnostica nei prezzi degli input**. Spiegare intuitivamente cosa vuol dire in termini di critica alla teoria neoclassica della produzione.

Relazione con funzione di Costo

Dato per acquisito il significato di funzione di **minimo valore** di *C(**w**, **y**)* ovvero che

$$C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}) = \underset{\boldsymbol{x}}{Min}\left\{\sum\nolimits_{\forall i} w_i x_i \,:\, \boldsymbol{x} \in L(\boldsymbol{y})\right\}$$

possiamo porre la relazione fondamentale di dualità tra costi e distanza come segue

$$C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}) = \underset{\boldsymbol{x}}{Min}\left\{\sum\nolimits_{\forall i} w_i x_i \,:\, D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq 1\right\}$$

se e solo se

$$D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \underset{\boldsymbol{w}}{Inf}\left\{\sum\nolimits_{\forall i} w_i x_i \,:\, C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}) \geq 1\right\}$$

La parte con il “se” implica che:

Se partiamo da una funzione di costo e ne deriviamo la funzione di distanza e da questa deriviamo una funzione di costo, quest’ultima funzione di costo così ottenuta è uguale a quella originaria. Bisogna poter fare avanti e indietro tra le due funzioni.

La parte con il “solo se” implica che

Se la funzione di costo è derivata dalla funzione di distanza attraverso la minimizzazione della spesa per tutti i fattori disponibili, allora la funzione di distanza può essere ricavata dalla funzione di costo cercandone l'infimum relativamente a tutti i prezzi dei fattori. Inoltre si può dimostrare che

$$C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}) = \underset{\boldsymbol{x}}{Min}\left\{\frac{\sum_{\forall i} w_i x_i}{D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\right\}$$

$$D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \underset{\boldsymbol{w}}{Inf}\left\{\frac{\sum_{\forall i} w_i x_i}{C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})}\right\}$$

Da cui

$$C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}) \le \frac{\sum_{\forall i} w_i x_i^*}{D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} \equiv \frac{\text{Spesa per Ottima quantità di input}}{D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} = \frac{\text{Spesa per Ottima quantità di input}}{1}$$

ovvero

$$C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}) D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le \sum_{\forall i} w_i x_i^*$$

ovvero

$$C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}) = \sum_{\forall i} w_i x_i^* \text{ SE } D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1.$$

I costi li minimizzate davvero (funzione del costo minimizzata = spesa effettivamente sostenuta per la quantità ottima di input), dato l'output da produrre, se avete $D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$!

Esempio

In condizioni di efficienza tecnica dovremmo avere $y^0 = A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ ma scopriamo che in realtà per produrre quel dato y^0 impieghiamo una quantità maggiore di input $(x_1 + \hat{x}_1)$ e $(x_2 + \hat{x}_2)$ dove $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ sono le quantità positive "in eccesso" che in teoria dovrebbero darci un output maggiore, data la tecnologia, ovvero $y^1 = A(x_1 + \hat{x}_1)^{\alpha}(x_2 + \hat{x}_2)^{1-\alpha} > y^0$ ma non lo fanno e sono solo uno spreco. In che misura occorre ridurre gli input per produrre la y^0 data senza sprechi?
Allora dividiamo gli input per uno scalare positivo $\lambda > 1$:

$$y^0 = A\left(\frac{x_1}{\lambda} + \frac{\hat{x}_1}{\lambda}\right)^{\alpha}\left(\frac{x_2}{\lambda} + \frac{\hat{x}_2}{\lambda}\right)^{1-\alpha} = \frac{1}{\lambda} A(x_1 + \hat{x}_1)^{\alpha}(x_2 + \hat{x}_2)^{1-\alpha} \text{ da cui}$$

$$\lambda = \frac{A(x_1 + \hat{x}_1)^{\alpha}(x_2 + \hat{x}_2)^{1-\alpha}}{y^0} = \frac{A(x_1 + \hat{x}_1)^{\alpha}(x_2 + \hat{x}_2)^{1-\alpha}}{A(x_1)^{\alpha}(x_2)^{1-\alpha}} > 1$$

Se moltiplichiamo gli input dell'espressione $y^0 = A(x_1 + \hat{x}_1)^{\alpha}(x_2 + \hat{x}_2)^{1-\alpha}$ per $1/\lambda$ otteniamo $y^0 = A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ ed eliminiamo lo spreco di input: la produzione data si realizza con la minima quantità di fattori richiesta dalla tecnologia. Per ottenere ciò se partiamo da una situazione di inefficienza, i fattori devono essere ridotti di una proporzione λ comune ad entrambi per eliminare l'inefficienza e produrre l'output effettivamente prodotto ma senza sprechi.

La funzione $D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \dfrac{A(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha}(x_2+\hat{x}_2)^{1-\alpha}}{y^0} > 1$ dà la misura di questa riduzione equi-proporzionale degli input necessaria per realizzare l'eliminazione dello spreco.

$D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lambda$ rispetta le proprietà elencate sopra:

$D_I(\mathbf{x},\mathbf{y})$ è non decrescente in $\boldsymbol{x}$ dato y^0:

$$\frac{\partial D_I}{\partial x_1} = \frac{\alpha A(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha-1}(x_2+\hat{x}_2)^{1-\alpha}}{y^0} > 0 \qquad \frac{\partial D_I}{\partial x_2} = \frac{(1-\alpha)A(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha}(x_2+\hat{x}_2)^{-\alpha}}{y^0} > 0$$

$$\frac{\partial^2 D_I}{\partial x_1^2} = -\frac{\alpha(1-\alpha)A(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha-2}(x_2+\hat{x}_2)^{1-\alpha}}{y^0} \qquad \frac{\partial^2 D_I}{\partial x_2^2} = -\frac{\alpha(1-\alpha)A(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha}(x_2+\hat{x}_2)^{-1-\alpha}}{y^0}$$

$D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ è non crescente e quasi concava in y^0:

$$\frac{\partial D_I}{\partial y} = -\frac{A(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha}(x_2+\hat{x}_2)^{1-\alpha}}{y^{o2}} < 0;\ \frac{\partial^2 D_I}{\partial y^{o2}} = \frac{2A(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha}(x_2+\hat{x}_2)^{1-\alpha}}{y^{o3}} > 0$$

$D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ è concava in $\boldsymbol{x}$**:** vedi derivate seconde

$D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ è omogenea di grado 1 in $\boldsymbol{x}$**:** Applicando il Teorema di Eulero abbiamo

$$\frac{\alpha A(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha-1}(x_2+\hat{x}_2)^{1-\alpha}}{y^0}(x_1+\hat{x}_1) + \frac{(1-\alpha)A(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha}(x_2+\hat{x}_2)^{-\alpha}}{y^0}(x_2+\hat{x}_2) =$$
$$A(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha-1}(x_2+\hat{x}_2)^{1-\alpha}$$

Esercizio

Ricavare che per la tecnologia $y^0 = A\left[(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha} + (x_2+\hat{x}_2)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$ la funzione $D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lambda$ è data da $\dfrac{A\left[(x_1+\hat{x}_1)^{\alpha} + (x_2+\hat{x}_2)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}{y^0}$ e che essa rispetta le proprietà viste nell'esercizio precedente.

Esercizio svolto e commentato

Ricavare la funzione di costo dalla tecnologia $y = x_1 x_2$ con il solito vincolo di spesa e, applicando la definizione di funzione di distanza $D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \underset{\boldsymbol{w}}{Inf}\left\{\sum_{\forall i} w_i x_i : C(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) \geq 1\right\}$, ricavare che la D_I è pari a 1 se i costi sono davvero minimizzati. [Usare il risultato per il quale $C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq \sum_{\forall i} w_i x_i^*$].

Dalla minimizzazione della spesa con vincolo della produzione otteniamo le domande compensate degli input

$$x_1 = \left(\frac{w_2}{w_1} y\right)^{\frac{1}{2}} \quad x_2 = \left(\frac{w_1}{w_2} y\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sostituendole nel vincolo di spesa abbiamo la funzione di costo minimo

$$C(\boldsymbol{w}, y) = 2(w_2 w_1 y)^{\frac{1}{2}}$$

Allora minimizziamo la spesa effettiva imponendo il vincolo stretto $C(\boldsymbol{w}, y) = 1$:

$$\Lambda = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \mu\left[1 - 2(w_2 w_1 y)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Dalle condizioni di stazionarietà anche rispetto a μ abbiamo

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{w_2}{w_1} \\ 4(w_2 w_1 y) = 1 \end{array}\right\}$$

Sostituendo i prezzi dalle domande compensate e ricordando che $C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq \sum_{\forall i} w_i x_i^*$, la funzione di distanza è

$$D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq \frac{\sum_{\forall i} w_i x_i^*}{C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})}.$$

Sostituendo alle domande ottime i valori ottenuti dalle condizioni di stazionarietà del problema di minimo otteniamo che $\sum_{\forall i} w_i x_i^* = 2\sqrt{w_1 w_2 y}$ e poiché anche $C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}) = 2(w_2 w_1 y)^{\frac{1}{2}}$ nel nostro caso (essendo le scelte il risultato un processo di minimizzazione) il loro quoziente implica necessariamente che $D_I(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$ e non ci sono sprechi. Se invece, fatti i conti, la spesa effettiva fosse $\sum_{\forall i} w_i \hat{x}_i$ con $\hat{x}_i > x_i^*$ avremmo $D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \dfrac{\sum_{\forall i} w_i \hat{x}_i}{C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})} > 1$ e quindi per l'efficienza dovremmo applicare un $\lambda > 1$ in modo che $\dfrac{\sum_{\forall i} w_i \dfrac{\hat{x}_i}{\lambda}}{C(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})} = D_I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1$.

Sintesi

La minimizzazione dei costi, data la produzione assegnata, e la funzione di distanza nello spazio degli input uguale a 1 (sempre data la produzione assegnata) indicano in modo diverso che l'impresa sta usando una quantità efficiente di fattori.

In altre parole, se la spesa effettivamente effettuata $\sum_{\forall i} w_i x_i^*$ e la funzione di minimo valore dei costi $C(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ coincidono, dovrà necessariamente essere che $D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$. Se non coincidono, $D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 1$ e l'impresa sta usando una quantità eccessiva di input che genera costi superiori al minimo.
Allora possiamo dire che $D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$ è la condizione "duale" (cioè non definita nello spazio dei costi ma in quello delle quantità di input e output) alla minimizzazione dei costi stessi.

Uso econometrico

Se volessimo stimare la funzione di distanza con $j \in N$ input e $i \in M$ output ma non ne conoscessimo la forma funzionale potremmo fare come con la funzione del costo e stimare il polinomio P_2 di Taylor nei logaritmi intorno (in questo caso) al valore 1 delle variabili (così *ln(1)* = 0):

$$\begin{aligned}\ln D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \alpha_0 + \sum_j \alpha_j \ln x_j + \sum_i \delta_i \ln y_i + 0.5 \sum_j \sum_k \gamma_{jk} (\ln x_j)(\ln x_k) \\ &+ 0.5 \sum_i \sum_s \beta_{is} (\ln y_i)(\ln y_s) + \sum_j \sum_i \eta_{ji} (\ln x_j)(\ln y_i) + u \qquad (1)\end{aligned}$$

dove u è l'errore, sulla cui distribuzione ognuno faccia le ipotesi che ritiene migliori. L'interpretazione dei coefficienti come le derivate dell'espansione, ad esempio,

$$\alpha_j = \frac{\partial}{\partial \ln x_j} \ln D_I(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

è analoga al caso della translogaritmica del costo (Quindi cosa rappresenta γ_{jj}?). Restrizioni, ereditate dalla funzione di costo (omogeneità lineare e simmetria) sono:

$$\sum_j \alpha_j = 1 \; ; \; \sum_j \gamma_{jk} = 0 = \sum_k \gamma_{kj} \; ; \; \sum_j \eta_{js} = 0 = \sum_s \eta_{sj}$$

Inoltre per le proprietà dei logaritmi

$$\frac{\partial}{\partial \ln x_j} \ln D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\partial D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial x_j} \frac{x_j}{D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} = w_j^* \frac{x_j}{D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$$

dove l'ultima sostituzione applica la proprietà 4.
Se siamo in condizioni di efficienza tecnica $D_I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$ e $w_j^* = w_j/C$. Allora ai fini di eventuali stime dei coefficienti (ricordandoci a cosa corrispondono nel polinomio) possiamo utilizzare

$$\frac{w_j x_j}{C(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})} = \text{Share } j.\text{ma} = \alpha_j + \gamma_{jj} \ln(x_j) + \sum_{k \neq j} \gamma_{jk} \ln(x_k) + \sum_i \eta_{ji} \ln(y_i) + \varepsilon$$

dove ε è l'errore (sulla cui distribuzione ognuno faccia le ipotesi che ritiene migliori) e procediamo alla stima delle condizioni di efficienza attraverso la stima di equazioni di quota di spesa. Lo facciamo applicando le restrizioni di cui sopra e formando un sistema insieme a tutte le **altre** $N - 2$ *equazione delle quote* di spesa il cui numero dipende dal numero dei fattori. **Ripeto, da non stimare tutte: il sistema deve avere in tutto N–1** equazioni di quota (come mai? Ricordarsi che le quote sommano ad 1 *osservazione per osservazione* e che con tutte le quote la matrice varianza-covarianza è singolare). L'errore stimato misurerà l'inefficienza tecnica.

In tutti casi (stima della traslog della funzione o delle equazioni delle quote) i prezzi degli input non compaiono MAI. Questo è il grande vantaggio. Vi liberate del problema della più che probabile endogeneità dei prezzi degli input.

Guardare gli articoli caricati nella pagina e-learning per esempi di studi applicati.