Microeconomia Clamses 2/7/2019

D1 (punti 7, senza parti facoltative; punti 9 con parti facoltative) Sia

$$u = \ln U = \alpha \ln\left(X - \bar{X}\right) + (1-\alpha)\ln\left(Y - \bar{Y}\right) \text{ con } 0 \le \alpha \le 1$$

e un vincolo di bilancio $p_X X + p_Y Y = R$.

una funzione di utilità di tipo Stone-Geary dove le variabili X e Y indicano quantità di beni di consumo e la sopralineatura indica il livello di consumo di "sussistenza". Ricavare: **a)** Domande compensate o Hicksiane di X e Y **enunciandone** le principali proprietà (secondo voi); **b**) Funzione di spesa **enunciandone** le principali proprietà (secondo voi); **c**) Domande ordinarie **enunciandone** le principali proprietà (secondo voi); **d**) Valutare a cosa corrispondono le due domande di cui ai punti a) e c) se $\bar{X} = \bar{Y} = 0$; e) **Ricavare** la domanda ordinaria inversa di X applicando direttamente l'identità di Hotelling-Wold.
(parte facoltativa) **Ricavare** l'equazione di Slutsky relativa ad uno dei due beni e discutere l'interpretazione che viene usualmente data ai termini che la compongono.

a) Per semplificare le notazioni chiamiamo $\tilde{X} = X - \bar{X}$ e $\tilde{Y} = Y - \bar{Y}$ per poi sostituire. Formiamo la Lagrangiana

$\Lambda = p_X X + p_Y Y - \lambda\left[\alpha \ln\left(\tilde{X}\right) + (1-\alpha)\ln\left(\tilde{Y}\right) - \bar{u}\right]$ le cui condizioni di stazionarietà rispetto a $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ richiedono

$$\tilde{Y} = \left[\frac{p_X}{p_Y}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]\tilde{X}$$

Sostituendo nel vincolo di utilità otteniamo, dopo elementari passaggi,

$$X^H = \bar{U}\left[\frac{p_X}{p_Y}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]^{\alpha-1} + \bar{X} \qquad \text{e} \qquad Y^H = \bar{U}\left[\frac{p_X}{p_Y}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]^{\alpha} + \bar{Y}$$

[**ulteriore ed eventuale parte facoltativa**: tali valori di X e Y definiscono un massimo, un minimo o un punto di sella nel problema vincolato trasformato in non vincolato attraverso la Lagrangiana? Vedere dispense]

Proprietà (vedi testo o dispense). Verifichiamo solo omogeneità di grado zero nei due prezzi per X^H:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^H}{\partial p_X}p_X + \frac{\partial X^H}{\partial p_Y}p_Y &= (\alpha-1)\bar{U}\left[\frac{p_X}{p_Y}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]^{\alpha-2}\left(\left(\frac{1-\alpha}{p_Y\alpha}\right)\right)p_X + \\ &\quad -(\alpha-1)\bar{U}\left[\frac{p_X}{p_Y}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]^{\alpha-2}\left(\frac{p_X}{p_Y^2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)p_Y \\ &= (\alpha-1)\bar{U}\left[\left(\frac{p_X}{p_Y}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{p_X}{p_Y}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha-1}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Stesso risultato per Y^H.

b) Sostituire le domande compensate nel vincolo di spesa:

$$e(p_X, p_Y, \bar{u}) = p_X\left\{\bar{U}\left[\frac{p_X}{p_Y}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]^{\alpha-1}\right\} + p_Y\left\{\bar{U}\left[\frac{p_X}{p_Y}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]^{\alpha}\right\} + \left[p_X\bar{X} + p_Y\bar{Y}\right]$$

$$= \bar{U}\left[\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha-1}\frac{p_X^{\alpha}}{p_Y^{\alpha-1}}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\frac{p_X^{\alpha}}{p_Y^{\alpha-1}}\right] + \left[p_X\bar{X} + p_Y\bar{Y}\right]$$

$$= \bar{U}\frac{p_X^{\alpha}}{p_Y^{\alpha-1}}\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\right] + \left[p_X\bar{X} + p_Y\bar{Y}\right]$$

$$= \bar{U}\frac{p_X^{\alpha}}{p_Y^{\alpha-1}}\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\right] + \left[p_X\bar{X} + p_Y\bar{Y}\right]$$

$$= \bar{U}\frac{p_X^{\alpha}}{p_Y^{\alpha-1}}\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha+1}\right]\frac{\alpha}{1-\alpha} + \left[p_X\bar{X} + p_Y\bar{Y}\right]$$

Derivando rispetto a p_X:

$$\frac{\partial e}{\partial p_X} = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)}\bar{U}\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha+1}\right]\frac{p_X^{\alpha-1}}{p_Y^{\alpha-1}} + \bar{X} = \bar{U}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha-1}\frac{p_X^{\alpha-1}}{p_Y^{\alpha-1}} + \bar{X} = X^H$$

Stesso risultato per p_Y

c) Domande ordinarie

Per semplificare le notazioni chiamiamo di nuovo $\tilde{X} = X - \bar{X}$ e $\tilde{Y} = Y - \bar{Y}$ per poi sostituire. Formiamo la Lagrangiana

$\Lambda = \alpha\ln\left(\tilde{X}\right) + (1-\alpha)\ln\left(\tilde{Y}\right) - \lambda\left[p_X(\tilde{X}+\bar{X}) + p_Y(\tilde{Y}+\bar{Y}) - R\right]$ le cui condizioni di stazionarietà rispetto a $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ richiedono (come prima)

$$\tilde{Y} = \left[\frac{p_X}{p_Y}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\tilde{X}\right]$$

Sostituendo nel vincolo di spesa

$$X^M = \frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y} - p_X\bar{X}\right] + \bar{X} \quad \text{e} \quad Y^M = \frac{1-\alpha}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X} - p_Y\bar{Y}\right] + \bar{Y}$$

Considerare la parte tra parentesi quadra e darne un'interpretazione. Tipo: $R - p_Y\bar{Y} - p_X\bar{X}$ indica l'importo complessivo spendibile per X o Y una volta decurtato R della spesa di "sussistenza" (quindi necessaria).

Proprietà: vedi testo o dispense

d) Le domande compensate e ordinarie diventano identiche al caso delle preferenze C-D se i valori di sussistenza sono nulli.

e) Hotelling-Wold: Il "reddito" da utilizzare per il teorema è $R - p_Y\bar{Y} - p_X\bar{X}$. Allora

$$\bar{p}_X \equiv \frac{p_X}{R - p_Y\bar{Y} - p_X\bar{X}} = \frac{\partial \ln U \,/\, \partial \ln \tilde{X}}{\tilde{X}\left[\partial \ln U \,/\, \partial \ln \tilde{X} + \partial \ln U \,/\, \partial \ln \tilde{Y}\right]} = \frac{\alpha}{\tilde{X}\left[\alpha + 1 - \alpha\right]} = \frac{\alpha}{(X - \bar{X})}$$

Da cui, per riprova,

$$(X - \bar{X}) = \frac{\alpha\left[R - p_Y\bar{Y} - p_X\bar{X}\right]}{p_X} \text{ da cui } X^M = \frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y} - p_X\bar{X}\right] + \bar{X}$$

D2 (punti 7) Utilizzando le domande ordinarie di X e Y di cui a D1:

a) **Dimostrare** che la somma delle due elasticità al prezzo e dell'elasticità al reddito è pari a zero. Interpretare.

$$-1 - \frac{p_Y\bar{Y}}{R - p_Y\bar{Y}} + \frac{R}{R - p_Y\bar{Y}} = 0$$

Interpretazione: coerente con omogeneità di grado zero delle domande

b) Dopo aver ricavato la funzione di utilità indiretta, **dimostrare** che nel caso in questione vale l'identità di Roy.

Utilità indiretta (funzione del massimo valore): sostituire le domande ordinarie nella funzione di utilità

$$v(p_X, p_Y, R) = \alpha \ln\left(\frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y} - p_X X\right]\right) + (1-\alpha)\ln\left(\frac{1-\alpha}{p_Y}\left[R - p_X\bar{X} - p_Y\bar{Y}\right]\right)$$

Allora

$$\frac{\partial v}{\partial p_X} = -\left(\frac{\alpha\left[R - p_Y\bar{Y}\right] + (1-\alpha)p_X\bar{X}}{p_Y\left[R - p_X\bar{X} - p_Y\bar{Y}\right]}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial R} = \frac{1}{(R - -p_X\bar{X} - p_Y\bar{Y})}$$

Quindi

$$-\frac{\partial v}{\partial p_X} \Big/ \frac{\partial v}{\partial R} = \frac{\alpha}{p_X}\left[R - p_Y\bar{Y} - p_X\bar{X}\right] + \bar{X}$$

Stesso risultato vale per *Y*.

c) **Dimostrare** che vale l'aggregazione di Cournot. Interpretare.

Dato il vincolo alla spesa usuale a R gli sostituiamo le funzioni di domanda marshalliane ottenute dalla massimizzazione vincolata dell'utilità

$$R = p_X \left(\frac{\alpha}{p_X} \left[R - p_Y \bar{Y} - p_X \bar{X} \right] + \bar{X} \right) + p_Y \left(\frac{1-\alpha}{p_Y} \left[R - p_X \bar{X} - p_Y \bar{Y} \right] + \bar{Y} \right)$$

Derivando rispetto a p_X otteniamo

$$0 = p_X \frac{\partial X(\mathbf{p}, R)}{\partial p_X} + X(\mathbf{p}, R) + p_Y \frac{\partial Y(\mathbf{p}, R)}{\partial p_X}$$

Fare calcoli

d) **Dimostrare** che vale l'aggregazione di Engel.

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_R^{X_i} S_i = 1$$

Fare calcoli

D3 – D7 vedere dispense