Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

26 Aprile 2022

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max_u \int_0^5 x_2 \,\mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = 2ux_1 \\ \dot{x}_2 = 2(1-u)x_1 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 3 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min_u \int_0^2 (x-u)\,\mathrm{d}t + x(2) \\ \dot{x} = 1 + u^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions
$\mathcal{F} = \{V(t,x) = A + Bt + Ct^2 + D\ln(3-t) + E(3-t)x,$ with A, B, C, D, E constants$\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0,t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati.

i. Si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1) con ipotesi minimali;

ii. sotto opportune ipotesi, si illustri un risultato sul comportamento dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (*optimal path*) e lo si provi (è richiesto di porvare anche il "lemma tecnico");

iii. si introduca la nozione di controllo abnormale. Si determini il controllo ottimo per il seguente problema, mostrando che é abnormale:

$$\begin{cases} \max \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) u \,\mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = (x_1 - tu)^2 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = x_2(1) = 0 \end{cases}$$

4. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo, per $r > 0$,

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \displaystyle\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{0,\boldsymbol{\alpha}}} J(\mathbf{u}) \end{cases} \tag{2}$$

i. Si introduca con rigore la nozione di funzione valore corrente V^c. Si dimostri la relazione tra V^c e la funzione valore V del problema. Si ricavi l'equazione di Bellman–Hamilton–Jacobi per V^c;

ii. si usino i risultati del punto precedente per risolvere il seguente modello di "optimal consumption "

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\gamma} c^\gamma e^{-\delta t}\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = rx - c \\ x(0) = x_0 > 0 \\ x \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$$

ove r, γ e δ sono costanti positivi, con $\gamma \in (0, 1)$, tali che $\delta > r\gamma$.

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{V^c(x) = Ax^\gamma, \text{ with } A \text{ constants}\}$.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \displaystyle\max_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{3}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori. Siano f, g a ψ limitate, uniformemente continue e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$. continuous with

i. Si introducano, con rigore, le definizioni di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+, introducendo le nozioni di controllo e strategia non anticipativa necessarie. Quando si dice che il problema (3) ammette funzione valore V?

ii. Si provi che il seguente gioco a somma zero non ammette funzione valore:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \displaystyle\max_{u_1} J(u_1, u_2) \qquad \text{Player II: } \min_{u_2} J(u_1, u_2) \\ \qquad |u_1| \leq 1 \qquad\qquad\qquad |u_2| \leq 1 \\ J(u_1, u_2) = \displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sgn}(x) \left(1 - e^{-|x|}\right) e^{-t}\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = (u_1 - u_2)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

iii. Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} \text{Player I: } \displaystyle\max_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \psi(T_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \in \mathcal{T} \end{cases} \tag{5}$$

dove $\mathcal{T} \subset [0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ è il target set chiuso, $\mathcal{G}$ è il game set e $T_{\mathbf{x}}$ è l'exit time. Si supponga g e ψ continue, che il problema ammetta funzione valore in $C^1(\mathcal{G} \setminus \mathcal{T})$ e che sia soddisfatta la condizione di Isaacs (se necessario si aggiungano altre ipotesi). Si fornisca una dimostrazione geometrica dell'equazione di Isaacs per il problema (5).