Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

17 Febbraio 2022

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^4 3x \,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 0 \\ x(4) = \frac{3}{2}e^4 \\ 0 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_0^2 (x^2 + u^2) \,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = -2 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

In order to solve the PDE $xF_x + Ax^2 + BF_x^2 + F_t = 0$ (with A and B constants), we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = x^2 G(t), \text{ with } G = G(t) \text{ function}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con f, g e ψ funzioni continue e $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati.

i. Sotto opportune ipotesi, si enunci e si provi la condizione necessaria di Bellman–Hamilton–Jacobi affinchè V sia funzione valore V del problema (1);

ii. Sotto opportune ipotesi, si enunci e si provi una condizione sufficiente affinchè V sia la funzione valore per il problema (1) e $\mathbf{u}^*$ suo controllo ottimo.

4. (6 punti) Si consideri il "moonlanding problem":

$$
\begin{cases}
\max\limits_{u\in\mathcal{C}} m(T) \\
\dot h = v \\
\dot v = \dfrac{u}{m} - g \\
\dot m = -ku \\
h(0) = h_0, \qquad h(T) = 0 \\
v(0) = v_0, \qquad v(T) = 0 \\
m(0) = M + F \\
m(t) \geq 0, \qquad h(t) \geq 0 \\
\mathcal{C} = \{u : [0,T] \to [0,\alpha],\ \text{admissible}\}
\end{cases}
$$

dove $h_0,\ M,\ F,\ g,\ -v_0,\ k$ e α sono costanti positive fissate e il tempo finale T è libero.

i. Si illustri il problema nel dettaglio, introducendo le variabili di stato, il controllo, le loro relazioni tramite la dinamica e il funzionale da massimizzare;

ii. si provi che la soluzione ottima ha al piu' uno switching point.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di cattura-evasione di tipo

$$
\begin{cases}
\textit{Pursuer}\colon \min\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}\colon \max\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\
\qquad \mathbf{u}_1(t) \in U_1 \subset \mathbb{R}^{k_1} \qquad\qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \subset \mathbb{R}^{k_2} \\
\qquad J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\, t \geq 0 \text{ s.t. } \mathbf{x}(t) \in \operatorname{int}(\mathcal{T}_0) \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\
\qquad \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\
\qquad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^n
\end{cases}
$$

con g continua, target set $[0,\infty) \times \mathcal{T}_0$ chiuso e game set $[0,\infty) \times \mathcal{G}_0$. Si supponga, inoltre, che la condizione di Isaacs sia soddisfatta.

i. Sotto opportune e ulteriori ipotesi

- si forniscano le definizioni di insieme degli stati di cattura $\mathcal{C}_{ap}$, di insieme degli stati di fuga $\mathcal{E}_{sc}$ e di barriera $\mathcal{B}_{ar}$;
- si introduca la nozione di semipermeabilità;
- si introduca il concetto di controllo di barriera;
- si forniscano e **si dimostrino** le equazioni che permettono di costruire la barriera.

ii. Si consideri il modello "Interception of a straight flying evader":

$$
\begin{cases}
\textit{Pursuer}\colon \min\limits_{\psi} J(\psi,\varphi), \qquad \textit{Evader}\colon \max\limits_{\varphi\in\{-1,+1\}} J(\psi,\varphi) \\
\qquad J(\psi,\varphi) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\, t \geq 0 \text{ s.t. } \|(x(t),y(t))\|_2 < l \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\
\qquad \dot x = \omega\varphi - \sin\psi \\
\qquad \dot y = -\cos\psi \\
\qquad (x(0),y(0)) = (x_0,y_0), \qquad y_0 \geq 0
\end{cases}
$$

con $\omega > 1$ e $l > 0$ fissati.

- si illustri il modello con rigore, introducendo le variabili di stato, il controllo e le loro relazioni tramite la dinamica;
- sfruttando risultati del punto i., si costruiscano la barriera del problema, gli insiemi $\mathcal{C}_{ap}$ e $\mathcal{E}_{sc}$.