Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

20 Gennaio 2022

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min \int_1^4 t^2 \left(\frac{1}{u} - x \right) \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = -x - tu \\ x(4) = 2 \\ 1 \leq u \leq 3 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con la Programmazione Dinamica

$$\begin{cases} \max\limits_{u} \left(-\frac{1}{2} x_1(1)^2 + x_2(1) \right) \\ \dot{x_1} = x_1 + \sqrt{2} u \\ \dot{x_2} = -u^2 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

In order to solve the BHJ equation consider the family of functions $\mathcal{F} = \{ V(t, x_1, x_2) = a x_1^2 + x_2, \text{ with } a = a(t) \ \}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} \ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{ \mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile} \} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati, $U \subset \mathbb{R}^k$ chiuso.

i. Si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1), con ipotesi minimali;

ii. sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione sufficiente di Mangasarian e la si provi;

iii. sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione sufficiente di Arrow e la si provi.

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali a 2 giocatori e a somma zero, si consideri il modello "war of attrition and attack" di Isaacs:

$$\begin{cases} \textit{Player A}: \max\limits_{\alpha} J(\alpha, \beta), \qquad \textit{Player B}: \min\limits_{\beta} J(\alpha, \beta) \\ \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad\qquad 0 \leq \beta \leq 1 \\ \quad J(\alpha, \beta) = \int_0^T (1 - \alpha) x_1 - (1 - \beta) x_2 \, \mathrm{d}t \\ \quad \dot{x}_1 = m_1 - c_1 \beta x_2 \\ \quad \dot{x}_2 = m_2 - c_2 \alpha x_1 \\ \quad x_i(0) = x_{i0} > 0, \qquad x_i(t) > 0 \end{cases}$$

con $c_1,\ c_2,\ m_1$ e m_2 costanti positive, con $c_2 > c_1$, $T > 0$ fissato e grande.

i. Si introduca il modello proposto;

ii. si determinino gli equilibri di Nash nella classe delle strategie open–loop.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^T f(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{2}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori.

i. Si introducano, con rigore e con le ipotesi necessarie, le definizioni di strategie non anticipative e la relativa definizione di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+. Quando si dice che il problema (2) ammette funzione valore V?

ii. Si consideri il gioco a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{u_1} J(u_1,u_2) \qquad \text{Player II: } \min\limits_{u_2} J(u_1,u_2) \\ |u_1| \le 1 \qquad\qquad |u_2| \le 1 \\ J(u_1,u_2) = \displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sgn}(x)\left(1-e^{-|x|}\right)e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = (u_1-u_2)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

Si provi che non ammette funzione valore.

iii. Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \psi(T_{\mathbf{x}},\mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T_{\mathbf{x}},\mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \in \mathcal{T} \end{cases} \tag{4}$$

dove $\mathcal{T} \subset [0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ é il target set chiuso; sia $\mathcal{G} \subset [0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ il game set. Si supponga che il problema ammetta funzione valore in $C^1(\mathcal{G}\setminus\mathcal{T})$ e che sia soddisfatta la condizione di Isaacs (se necessario si aggiungano altre ipotesi): si fornisca una dimostrazione geometrica dell'equazione di Isaacs per il problema (4).