Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

7 Luglio 2022

Cognome:__________________________ nome:__________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min\limits_u \displaystyle\int_0^1 u^2 \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = -2x + u \\ x(0) = 1 \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min\limits_u \displaystyle\int_0^2 (u^2 + 4x) \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ x(0) = A \qquad\qquad \text{con } A \text{ fissato e } |A| < 2 \\ x(2) = 2 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

In order to solve the BHJ equation we suggest to consider the family of functions
$\mathcal{F} = \{V(t,x) = a(t-2)^3 + b(x+2)(t-2) + c\frac{(x-2)^2}{t-2}$, with a, b, c non zero constants $\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati.

i. Si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1) con ipotesi minimali;

ii. sotto opportune ipotesi, si illustri un risultato sul comportamento dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (*optimal path*) e lo si provi (è richiesto di porvare anche il "lemma tecnico");

iii. si introduca la nozione di controllo abnormale. Si determini il controllo ottimo per il seguente problema, mostrando che é abnormale:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) u \, \mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = (x_1 - tu)^2 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = x_2(1) = 0 \end{cases}$$

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali di cattura-evasione, si consideri il modello "the lady in the lake":

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}:\ \min_{u_1} |\theta(T)| \qquad\qquad \textit{Lady (E)}:\ \max_{u_2} |\theta(T)| \\ |u_1| \leq 1 \\ \dot{\theta} = \dfrac{v_E \sin u_2}{r} - \dfrac{u_1}{R} \\ \dot{r} = v_E \cos u_2 \\ r(0) = 0,\ r(T) = R \end{cases}$$

con v_E fissato in $(0,1)$, $R > 0$ fissato e $T > 0$ libero.

i. Si illustri il modello proposto, introducendo le variabii di stato, i controlli, la dinamica, il target set; si costruisca il game set;

ii. si determini un equilibrio di Nash per il problema proposto. In particolare è richiesto lo studio sulla possibilità che i due giocatori realizzino il loro pay off, cioè del segno di $\theta(T^*)$ al tempo ottimo di uscita T^*.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{u}} \displaystyle\int_0^\infty f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{2}$$

i. Si consideri il controesempio di Halkin

$$\begin{cases} \max\limits_{u} J(u) \\ J(u) = \displaystyle\int_0^\infty (1 - x)u\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = (1 - x)u \\ x(0) = 0 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

e si mostri che esistono dei controlli ottimi il cui moltiplicatore λ^* è tale che $\lim_{t\to\infty} \lambda^*(t) \neq 0$;

ii. con opportune ipotesi, si enunci una condizione sufficiente di ottimalità per il problema (2);

iii. nel caso in cui la running cost nel problema (2) sia $e^{-rt} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, con $r > 0$ fissato, si introducano la Hamiltoniana corrente H^c e il moltiplicatore corrente; si scrivano il principio del massimo e l'equazione aggiunta per H^c e si provino queste nuove relazioni.