Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

12 Settembre 2022

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min\limits_u T \\ \dot{x} = x + \frac{3}{u} \\ x(0) = 1 \\ x(T) = 2 \\ u \geq 3 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min\limits_u \displaystyle\int_0^2 (x - u)\,\mathrm{d}t + x(2) \\ \dot{x} = 1 + u^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions
$\mathcal{F} = \{V(t,x) = A + Bt + Ct^2 + D\ln(3-t) + E(3-t)x, \text{ with } A, B, C, D, E \text{ constants}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} \ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si consideri l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi: il fatto che la funzione valore sia Lipschitz che conseguenze ha? Si introduca la nozione di soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi, motivando la necessità di tale definizione;

iii. sia $V \in C^1$; si provi che essere soluzione del sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi é equivalente a essere soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi.

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali di cattura-evasione, si consideri il modello "the lady in the lake":

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}: \ \min\limits_{u_1} |\theta(T)| \qquad \qquad \textit{Lady (E)}: \ \max\limits_{u_2} |\theta(T)| \\ \qquad |u_1| \leq 1 \\ \qquad\qquad \dot{\theta} = \dfrac{v_E \sin u_2}{r} - \dfrac{u_1}{R} \\ \qquad\qquad \dot{r} = v_E \cos u_2 \\ \qquad\qquad r(0) = 0, \ r(T) = R \end{cases}$$

con v_E fissato in $(0,1)$, $R>0$ fissato e $T>0$ libero.

i. Si illustri il modello proposto, introducendo le variabii di stato, i controlli, la dinamica, il target set; si costruisca il game set;

ii. si determini un equilibrio di Nash per il problema proposto. In particolare è richiesto lo studio sulla possibilità che i due giocatori realizzino il loro pay off, cioè del segno di $\theta(T^*)$ al tempo ottimo di uscita T^*.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{u}} \displaystyle\int_0^\infty f(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{1}$$

i. Si consideri il controesempio di Halkin

$$\begin{cases} \max\limits_{u} J(u) \\ J(u) = \displaystyle\int_0^\infty (1-x)u\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = (1-x)u \\ x(0) = 0 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

e si mostri che esistono dei controlli ottimi il cui moltiplicatore λ^* è tale che $\lim_{t\to\infty}\lambda^*(t) \neq 0$;

ii. con opportune ipotesi, si enunci una condizione sufficiente di ottimalità per il problema (1);

iii. nel caso in cui la running cost nel problema (1) sia $e^{-rt}f(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$, con $r>0$ fissato, si introducano la Hamiltoniana corrente H^c e il moltiplicatore corrente; si scrivano il principio del massimo e l'equazione aggiunta per H^c e si provino queste nuove relazioni.