Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

9 Giugno 2020

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva, con il metodo variazionale, il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \int_{-1}^{1} (tx - u^2)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u^2 \\ x(-1) = -\frac{2}{e} - 1 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min \int_{0}^{2} (x^2 + u^2)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = -2 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

In order to solve the PDE $xF_x + Ax^2 + BF_x^2 + F_t = 0$ (with A and B constants), we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = x^2 G(t), \text{ with } G = G(t) \text{ function}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati. Siano f e g continue con derivate continue rispetto a $\mathbf{x}$.

i. Si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1);

ii. si illustri un risultato sul comportamento dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (*optimal path*) e lo si provi;

iii. sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione sufficiente di Mangasarian e la si provi.

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali di cattura-evasione, si consideri il modello "the lady in the lake":

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}: \min\limits_{u_1} |\theta(T)| \qquad \textit{Lady (E)}: \max\limits_{u_2} |\theta(T)| \\ |u_1| \le 1 \\ \dot{\theta} = \dfrac{v_E \sin u_2}{r} - \dfrac{u_1}{R} \\ \dot{r} = v_E \cos u_2 \\ r(0) = 0, \ r(T) = R \end{cases}$$

con v_E fissato in $(0,1)$, $R > 0$ fissato e $T > 0$ libero.

i. Si introduca il modello proposto;

ii. si determini un equilibrio di Nash per il problema proposto. In particolare è richiesto lo studio sulla possibilità che i due giocatori realizzino il loro pay off, cioè del segno di $\theta(T^*)$ al tempo ottimo di uscita T^*.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1 \in U_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2 \in U_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{2}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori.

i. Si introducano, con rigore, le definizioni di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+, introducendo le nozioni di controllo e strategia non anticipativa necessarie. Quando si dice che il problema (2) ammette funzione valore V?

ii. Si consideri il gioco a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{u_1} J(u_1, u_2) \qquad \text{Player II: } \min\limits_{u_2} J(u_1, u_2) \\ |u_1| \le 1 \qquad\qquad\qquad |u_2| \le 1 \\ J(u_1, u_2) = \displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sgn}(x) \left(1 - e^{-|x|}\right) e^{-t}\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = (u_1 - u_2)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

Si provi che non ammette funzione valore.

iii. Si fornisca la condizione di Isaacs per il problema (2): si mostri che tale condizione per (3) non è verificata.