Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

7 Luglio 2020

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min\limits_u T \\ \dot{x} = x + \frac{3}{u} \\ x(0) = 1 \\ x(T) = 2 \\ u \geq 3 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min\limits_u \displaystyle\int_0^2 (x-u)\,\mathrm{d}t + x(2) \\ \dot{x} = 1 + u^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions
$\mathcal{F} = \{V(t,x) = A + Bt + Ct^2 + D\ln(3-t) + E(3-t)x, \text{ with } A,B,C,D,E \text{ constants}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x},\mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0,t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si consideri l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi: il fatto che la funzione valore sia Lipschitz che conseguenze ha? Si introduca la nozione di soluzione viscosa per l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi, motivando la necessità di tale definizione;

iii. si provi che $V(t,x) = |x| + t$ é soluzione viscosa dell'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi per il problema

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{-1}^{0} -\frac{(|u|+2)^2}{4}\,\mathrm{d}t + |x(0)| \\ \dot{x} = u \\ |u| \leq 2 \\ x(-1) = 1 \end{cases}$$

4. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{1}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori.

i. Si introducano, con rigore, le definizioni di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+, introducendo le nozioni di controllo e strategia non anticipativa necessarie. Quando si dice che il problema (1) ammette funzione valore V?

ii. Si consideri il gioco a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{u_1} J(u_1, u_2) \qquad \text{Player II: } \min\limits_{u_2} J(u_1, u_2) \\ |u_1| \le 1 \qquad\qquad |u_2| \le 1 \\ J(u_1, u_2) = \displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sgn}(x) \left(1 - e^{-|x|}\right) e^{-t}\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = (u_1 - u_2)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Si provi che non ammette funzione valore.

iii. Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \psi(T, \mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T, \mathbf{x}(T)) \in \partial S \end{cases} \tag{3}$$

con T libero e target set $S \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ chiuso. Si supponga che il problema ammetta funzione valore in C^1 e che sia soddisfatta la condizione di Isaacs (se necessario si aggiungano altre ipotesi). Si fornisca una dimostrazione geometrica dell'equazione di Isaacs per il problema (3).

5. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali a 2 giocatori e a somma zero, si consideri il modello "war of attrition and attack" di Isaacs:

$$\begin{cases} \textit{Player A: } \max\limits_{\alpha} J(\alpha, \beta) \qquad \textit{Player B: } \min\limits_{\beta} J(\alpha, \beta) \\ 0 \le \alpha \le 1 \qquad\qquad 0 \le \beta \le 1 \\ J(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^T (1 - \alpha) x_1 - (1 - \beta) x_2\, \mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = m_1 - c_1 \beta x_2 \\ \dot{x}_2 = m_2 - c_2 \alpha x_1 \\ x_i(0) = x_{i0} > 0, \qquad x_i(t) > 0 \end{cases}$$

con $c_1,\ c_2,\ m_1$ e m_2 costanti positive, con $c_2 > c_1$, $T > 0$ fissato.

i. Si introduca il modello proposto;

ii. si determini un equilibrio di Nash nella classe dei controlli open loop (non è richiesto di verificare che $x_i(t) > 0$).