Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

14 Maggio 2020

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva, con il metodo variazionale, il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{-1}^{1} (tx - u^2)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u^2 \\ x(-1) = -\frac{2}{e} - 1 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-2t} \ln u \,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x - u \\ x(0) = 1 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

Per risolvere la BHJ equation, si suggerisce di cercare la soluzione per la funzione valore corrente nella famiglia di funzioni $\mathcal{F} = \{V(t,x) = Ae^{-2t}(\ln(Bx) + C)\,,\ A, B, C \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x},\mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si consideri l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi: il fatto che la funzione valore sia Lipschitz che conseguenze ha? Si introduca la nozione di soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi, motivando la necessità di tale definizione;

iii. sia $V \in C^1$; si provi che essere soluzione del sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi é equivalente a essere soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi.

4. (6 punti) Si consideri il seguente problema della “Dubin car”:

$$\begin{cases} \min_u T \\ \dot{x}_1 = \cos\theta \\ \dot{x}_2 = \sin\theta \\ \dot{\theta} = u \\ x_1(0) = 4, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \theta(0) = \pi/2 \\ x_1(T) = 0, \qquad x_2(T) = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

i. Si introduca con precisione il modello;

ii. si risolva il modello proposto (si suggerisce di usare un teorema di esistenza per garantire che il controllo estremale trovato è ottimo).

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di cattura-evassione di tipo

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}: \min_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}: \max_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{u}_1(t) \in U_1 \subset \mathbb{R}^{k_1} \qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \subset \mathbb{R}^{k_2} \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\, t \ge 0 \text{ s.t. } \mathbf{x}(t) \in \mathrm{int}(\mathcal{T}_0) \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con target set chiuso $[0, \infty) \times \mathcal{T}_0$ e game set $[0, \infty) \times \mathcal{G}_0$. Si supponga che la condizione di Isaacs sia soddisfatta.

i. Sotto le oppurtune ipotesi

- si fornisca la definizione dell'insieme degli stati di cattura $\mathcal{C}_{ap}$, dell'insieme degli stati di fuga $\mathcal{E}_{sc}$ e di barriera $\mathcal{B}_{ar}$;
- si introduca la nozione di semipermeabilità e si illustri la sua relazione con la barriera;
- si introduca il concetto di controllo di barriera.

ii. Con le opportune ipotesi, si illustrino e si provino le equazioni che permettono di costruire la barriera.

iii. Si consideri il modello “Interception of a straight flying evader”:

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}: \min_{\psi} J(\psi, \varphi), \qquad \textit{Evader}: \max_{\varphi \in \{-1,+1\}} J(\psi, \varphi) \\ J(\psi, \varphi) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\, t \ge 0 \text{ s.t. } \|(x(t), y(t))\|_2 < l \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \dot{x} = \omega\varphi - \sin\psi \\ \dot{y} = -\cos\psi \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \qquad y_0 \ge 0 \end{cases}$$

- si introduca il modello con rigore;
- si costruisca la barriera del problema, gli insiemi $\mathcal{C}_{ap}$ e $\mathcal{E}_{sc}$.