Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

22 Febbraio 2019

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^4 (1-u)x \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = ux \\ x(0) = 2 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^2 (2tx - u^2) \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = 1 - u^2 \\ x(0) = 0 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

In order to solve the BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = At^3 + Bxt^2 + Ct + Dx + E, \text{ with } A, B, C, D, E \text{ constants}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \displaystyle\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si consideri l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi: il fatto che la funzione valore sia Lipschitz che conseguenze ha? Si introduca la nozione di soluzione viscosa per l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi, motivando la necessità di tale definizione;

iii. si provi che $V(t,x) = |x| + t$ é soluzione viscosa dell'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi per il problema

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{-1}^{0} -\frac{(|u|+2)^2}{4} \, \mathrm{d}t + |x(0)| \\ \dot{x} = u \\ |u| \le 2 \\ x(-1) = 1 \end{cases}$$

4. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} \displaystyle\int_{t_0}^{T} f(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(T,\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T,\mathbf{x}(T)) \in \mathcal{T} \\ \mathcal{C} = \left\{\mathbf{u} : [t_0,T] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\right\} \end{cases} \tag{1}$$

con control set $U \subset \mathbb{R}^k$ e target set $\mathcal{T} \subset (t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n$.

i. Si fornisca un teorema di esistenza per il problema (1), nel caso U chiuso e poi nel caso U compatto.

ii. Si consideri il seguente problema dovuto a Bolza:

$$\begin{cases} J(u) = \displaystyle\int_0^1 (x^2 + (1-u^2)^2)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \\ \inf\limits_{u}\ J(u) \end{cases}$$

a. Si provi che esiste una successione minimante, ma non il minimo per il problema.

b. Con riferimento ai teoremi di esistenza del punto precedente, si mostri quale ipotesi non è soddisfatta in questo esempio.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di cattura-evassione di tipo

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}\text{: } \min\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}\text{: } \max\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{u}_1(t) \in U_1 \subset \mathbb{R}^{k_1} \qquad\qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \subset \mathbb{R}^{k_2} \\ \qquad J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\ t \geq 0 \text{ s.t. } \mathbf{x}(t) \in \mathrm{int}(\mathcal{T}_0) \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \qquad \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Si supponga che la condizione di Isaacs sia soddisfatta.

i. Si fornisca la definizione dell'insieme $\mathcal{C}_{ap}$ degli stati di cattura, dell'insieme $\mathcal{E}_{sc}$ degli stati di fuga e di stato di neutralitá.

ii. Si forniscano le definizioni di funzione valore superiore V^+ e funzione valore inferiore V^-; si provi che $V^+ = V^- = 1$ sull'insieme $\mathcal{E}_{sc}$.

iii. Si consideri il modello "Interception of a straight flying evader":

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}\text{: } \min\limits_{\psi} J(\psi,\varphi), \qquad \textit{Evader}\text{: } \max\limits_{\varphi\in\{-1,+1\}} J(\psi,\varphi) \\ \qquad J(\psi,\varphi) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\ t \geq 0 \text{ s.t. } \|(x(t),y(t))\|_2 < l \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \qquad \dot{x} = \omega\varphi - \sin\psi \\ \qquad \dot{y} = -\cos\psi \\ \qquad (x(0),y(0)) = (x_0,y_0), \qquad y_0 \geq 0 \end{cases}$$

Si introduca il modello con rigore e si costruisca la barriera del problema, gli insiemi $\mathcal{C}_{ap}$ e $\mathcal{E}_{sc}$.