Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

23 Aprile 2018

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min\limits_u T \\ \dot{x} = 2x + \frac{1}{u} \\ x(0) = \frac{5}{6} \\ x(T) = 2 \\ 3 \le u \le 5 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min\limits_u \int_0^2 (x - u)\ \mathrm{d}t + x(2) \\ \dot{x} = 1 + u^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions

$\mathcal{F} = \{V(t,x) = A + Bt + Ct^2 + D\ln(3-t) + E(3-t)x,\ \text{with } A, B, C, D, E \text{ constants}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}}\ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si consideri l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi: il fatto che la funzione valore sia Lipschitz che conseguenze ha? Si introduca la nozione di soluzione viscosa per l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi, motivando la necessità di tale definizione;

iii. si provi che $V(t,x) = |x| + t$ é soluzione viscosa dell'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi per il problema

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{-1}^{0} -\frac{(|u|+2)^2}{4}\,\mathrm{d}t + |x(0)| \\ \dot{x} = u \\ |u| \le 2 \\ x(-1) = 1 \end{cases}$$

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali di cattura-evasione, si consideri il modello "the lady in the lake":

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}: \min_{u_1} |\theta(T)| \qquad \qquad \textit{Lady (E)}: \max_{u_2} |\theta(T)| \\ |u_1| \leq 1 \\ \dot{\theta} = \dfrac{v_E \sin u_2}{r} - \dfrac{u_1}{R} \\ \dot{r} = v_E \cos u_2 \\ r(0) = 0, \ r(T) = R \end{cases}$$

con v_E fissato in $(0,1)$, $R > 0$ fissato e $T > 0$ libero.

i. Si introduca il modello proposto;

ii. si determini un equilibrio di Nash per problema proposto. In particolare è richiesto lo studio sulla possibilità che i due giocatori realizzino il loro pay off, cioè del segno di $\theta(T^*)$ al tempo ottimo di uscita T^*.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-rt} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \displaystyle\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{0,\boldsymbol{\alpha}}} J(\mathbf{u}) \end{cases} \tag{1}$$

con $r > 0$.

i. Si introduca con rigore la nozione di funzione valore corrente V^c. Si dimostri la relazione tra V^c e la funzione valore V del problema. Si ricavi l'equazione di Bellman–Hamilton–Jacobi per V^c;

ii. si usino i risultati del punto precedente per risolvere il seguente modello di "optimal consumption "

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma} c^{\gamma} e^{-\delta t} \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = rx - c \\ x(0) = x_0 > 0 \\ x \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$$

ove r, γ e δ sono costanti positivi, con $\gamma \in (0,1)$, tali che $\delta > r\gamma$.