Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

31 Gennaio 2018

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^4 (1-u)x \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = ux \\ x(0) = 2 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^2 (2tx - u^2) \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = 1 - u^2 \\ x(0) = 0 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

In order to solve the BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = At^3 + Bxt^2 + Ct + Dx + E, \text{ with } A, B, C, D, E \text{ constants}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \displaystyle\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si consideri l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi: il fatto che la funzione valore sia Lipschitz che conseguenze ha? Si introduca la nozione di soluzione viscosa per l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi, motivando la necessità di tale definizione;

iii. si provi che $V(t,x) = |x| + t$ é soluzione viscosa dell'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi per il problema

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{-1}^0 -\frac{(|u|+2)^2}{4} \, \mathrm{d}t + |x(0)| \\ \dot{x} = u \\ |u| \le 2 \\ x(-1) = 1 \end{cases}$$

4. (6 punti) Si consideri il seguente problema della "Dubin car":

$$\begin{cases} \min_u T \\ \dot{x}_1 = \cos\theta \\ \dot{x}_2 = \sin\theta \\ \dot{\theta} = u \\ x_1(0) = 4, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \theta(0) = \pi/2 \\ x_1(T) = 0, \qquad x_2(T) = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

i. Si introduca con precisione il modello;

ii. si risolva il modello proposto (si suggerisce di usare un teorema di esistenza per garantire che il controllo estremale trovato è ottimo).

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco di cattura–evasione

$$\begin{cases} \textit{Purser}:\ \max_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}:\ \min_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{u}_1(t) \in U_1, \qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_0^{T_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases}$$

con target set S, game set G e tempo di uscita e $T_{\mathbf{x}}$ dati da

$$S = \mathbb{R}^+ \times S_0 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \qquad G \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \qquad T_{\mathbf{x}} = \inf\{t \ge 0 : (t, \mathbf{x}(t)) \in S\}.$$

Si supponga che valga la condizione di minimax di Isaacs e che la funzione valore sia in C^1.

i. Si provi che la funzione valore non dipende esplicitamente dal tempo;

ii. si scriva e si ricavi l'equazione di Isaacs in questa situazione.