Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

3 Aprile 2017

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min_u T \\ \ddot{x} = u \\ x(0) = \dot{x}(0) = -1 \\ x(T) = \dot{x}(T) = 0 \\ |u| \leq 1 \end{cases}$$

Si consiglia di usare un teorema di esistenza per provare che che il controllo estremale determinato è ottimo.

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty e^{-2t} \ln u \, dt \\ \dot{x} = x - u \\ x(0) = 1 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

Per risolvere la BHJ equation, si suggerisce di cercare la soluzione per la funzione valore corrente nella famiglia di funzioni $\mathcal{F} = \{V(t,x) = Ae^{-2t}(\ln(Bx) + C), \ A, B, C \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \, dt + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{1}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori.

i. Si introducano, con rigore, le definizioni di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+. Quando si dice che il problema (1) ammette funzione valore V?

ii. Si introduca la nozione di equilibrio di Nash per il problema (1). Si fornisca la condizione di Isaacs per il problema (1). Supponiamo che il problema (1) ammetta funzione valore V: si illustrino le proprietà di V, sotto le opportune ipotesi.

iii. Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \psi(T, \mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T, \mathbf{x}(T)) \in \partial S \end{cases} \tag{2}$$

con T libero e target set $S \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Si supponga che il problema ammetta funzione valore in C^1 e che sia soddisfatta la condizione di Isaacs. Si fornisca una dimostrazione geometrica dell'equazione di Isaacs per il problema (2).

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali a 2 giocatori e a somma zero, si consideri il modello "war of attrition and attack" di Isaacs:

$$\begin{cases} \textit{Player A: } \max\limits_{\alpha} J(\alpha,\beta), & \textit{Player B: } \min\limits_{\beta} J(\alpha,\beta) \\ 0 \le \alpha \le 1 & 0 \le \beta \le 1 \\ J(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^T (1-\alpha)x_1 - (1-\beta)x_2 \, \mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = m_1 - c_1\beta x_2 \\ \dot{x}_2 = m_2 - c_2\alpha x_1 \\ x_i(0) = x_{i0} > 0, \qquad x_i(t) > 0 \end{cases}$$

con $c_1,\ c_2,\ m_1$ e m_2 costanti positive, con $c_2 > c_1$, $T > 0$ fissato.

i. Si introduca il modello proposto;

ii. si risolva il modello determinando i controlli ottimi, richiamando i risultati teorici che si usano (non è richiesto provare nulla).

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} \displaystyle\int_{t_0}^T f(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \, \mathrm{d}t + \psi(T,\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T,\mathbf{x}(T)) \in S \\ \mathcal{C} = \left\{\mathbf{u} : [t_0,T] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\right\} \end{cases} \tag{3}$$

con control set $U \subset \mathbb{R}^k$ e target set $S \subset (t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n$.

i. Si fornisca un teorema di esistenza per il problema (3), nel caso U chiuso e poi nel caso U compatto.

ii. Si consideri il seguente problema dovuto a Bolza:

$$\begin{cases} J(u) = \displaystyle\int_0^1 (x^2 + (1-u^2)^2) \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \\ \inf\limits_{u} \ J(u) \end{cases}$$

a. Si provi che esiste una successione minimante, ma non il minimo per il problema.

b. Con riferimento ai teoremi di esistenza del punto precedente, si mostri quale ipotesi non è soddisfatta in questo esempio.