Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

24 Febbraio 2017

Cognome:__________________________ nome:__________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty e^{-t/2}(x-u)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = ue^{-t} \\ x(0)=1 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min\limits_u \displaystyle\int_0^2 (x-u)\ \mathrm{d}t + x(2) \\ \dot{x} = 1+u^2 \\ x(0)=1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions

$\mathcal{F} = \{V(t,x) = A + Bt + Ct^2 + D\ln(3-t) + E(3-t)x, \text{ with } A,B,C,D,E \text{ constants}\}.$

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x},\mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0,t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si mostri che la funzione valore del problema

$$\begin{cases} \min\limits_u \displaystyle\int_0^2 (u^2+4x)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ x(0)=1 \\ x(2)=2 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

non è Lipschitz (non è richiesto di risolvere l'esercizio).

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali, si consideri un gioco a due giocatori con il primo Leader e il secondo Follower:

i. si introduca con rigore la nozione di equilibrio di Stackelberg nella classe delle strategie open–loop;

ii. si illustri la tecnica risolutiva con il metodo variazionale;

iii. si consideri il seguente problema ("On international pollution with hierarchical relations"):

$$\begin{cases} \text{Leader:} \ \max_{u_L} \int_0^\infty e^{-rt} \left(u_L \left(k_L - \frac{1}{2} u_L \right) - \frac{1}{2} \phi_L x^2 \right) \mathrm{d}t \qquad u_L \geq 0 \\ \text{Follower:} \ \max_{u_F} \int_0^\infty e^{-rt} \left(u_F \left(k_F - \frac{1}{2} u_F \right) - \frac{1}{2} \phi_F x^2 \right) \mathrm{d}t \qquad u_F \geq 0 \\ \dot{x} = u_L + u_F - \alpha x \\ x(0) = x_0, \qquad x(t) \geq 0 \end{cases}$$

con r ϕ_L, ϕ_F, K_L e K_F costanti positive;

a. si introduca il modello proposto;

b. si risolva il problema di determinare un equilibrio di Stackelberg non nullo nella classe delle strategie open–loop (è richiesto di risolvere completamente il problema per il Follower e di individuare, senza risolverle, le condizioni necessarie e sufficienti per il Leader).

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema della "Dubin car":

$$\begin{cases} \min_u T \\ \dot{x}_1 = \cos\theta \\ \dot{x}_2 = \sin\theta \\ \dot{\theta} = u \\ x_1(0) = 4, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \theta(0) = \pi/2 \\ x_1(T) = 0, \qquad x_2(T) = 0 \\ |u| \leq 1 \end{cases}$$

i. Si introduca con precisione il modello;

ii. si risolva il modello proposto (si suggerisce di usare un teorema di esistenza per garantire che il controllo estremale trovato è ottimo).