Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

27 Gennaio 2017

Cognome:____________________________ nome:____________________________

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \int_0^4 (1-u)x \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = ux \\ x(0) = 2 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \int_0^2 (2x - 4u) \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 5 \\ 0 \le u \le 2 \end{cases}$$

In order to solve the PDE $Ax + xF_x + F_t = 0$ (with A constant), we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = ax + bxe^{-t} + c, \; a,b,c \in \mathbb{R}\}$; for the PDE $Ax + xF_x + BF_x + F_t + C = 0$ (with A, B and C constants), we suggest the family $\mathcal{F} = \{F(t,x) = ax + bt + ce^{-t} + dxe^{-t} + f, \; a,b,c,d,f \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri un problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \; \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0, t_1 e $\boldsymbol{\alpha}$ fissati, con $f \in C^1$, $g \in C^1$ e l'insieme $U \subset \mathbb{R}^k$.

Nel contesto del metodo variazionale e sotto opportune ipotesi,

i. si enunci la condizione necessaria di ottimalitá. Inoltre si introduca la nozione di controllo estremale, di controllo normale e di controllo abnormale;

ii. si enunci e provi la condizione sufficiente di ottimalitá di Arrow;

iii. si provi che $u^* = 1$ é controllo ottimo abnormale per il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \int_0^1 u \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = (u - u^2)^2 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \\ 0 \le u \le 2 \end{cases}$$

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali di cattura-evasione, si consideri il modello "the lady in the lake":

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}: \ \min\limits_{u_1} |\theta(T)| \qquad\qquad \textit{Lady (E)}: \ \max\limits_{u_2} |\theta(T)| \\ |u_1| \le 1 \\ \dot{\theta} = \dfrac{v_E \sin u_2}{r} - \dfrac{u_1}{R} \\ \dot{r} = v_E \cos u_2 \\ r(0) = 0, \ r(T) = R \end{cases}$$

con v_E fissato in $(0,1)$, $R > 0$ fissato e $T > 0$ libero.

i. Si introduca il modello proposto;

ii. si risolva il modello determinando i controlli ottimi. In particolare è richiesto lo studio sulla possibilità che i due giocatori realizzino il loro pay off, cioè del segno di $\theta(T^*)$ al tempo ottimo di uscita T^*.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco di cattura–evasione

$$\begin{cases} \textit{Purser}: \ \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}: \ \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{u}_1(t) \in U_1, \qquad\qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^{T_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases}$$

con target set S e tempo di uscita e $T_{\mathbf{x}}$ dati da

$$S = \mathbb{R}^+ \times S_0 \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \qquad\qquad T_{\mathbf{x}} = \inf\{t \ge 0 : (t, \mathbf{x}(t)) \in S\}.$$

Si supponga che valga la condizione di minimax di Isaacs.

i. Si provi che la funzione valore non dipende esplicitamente dal tempo;

ii. si scriva e si ricavi l'equazione di Isaacs in questa situazione.